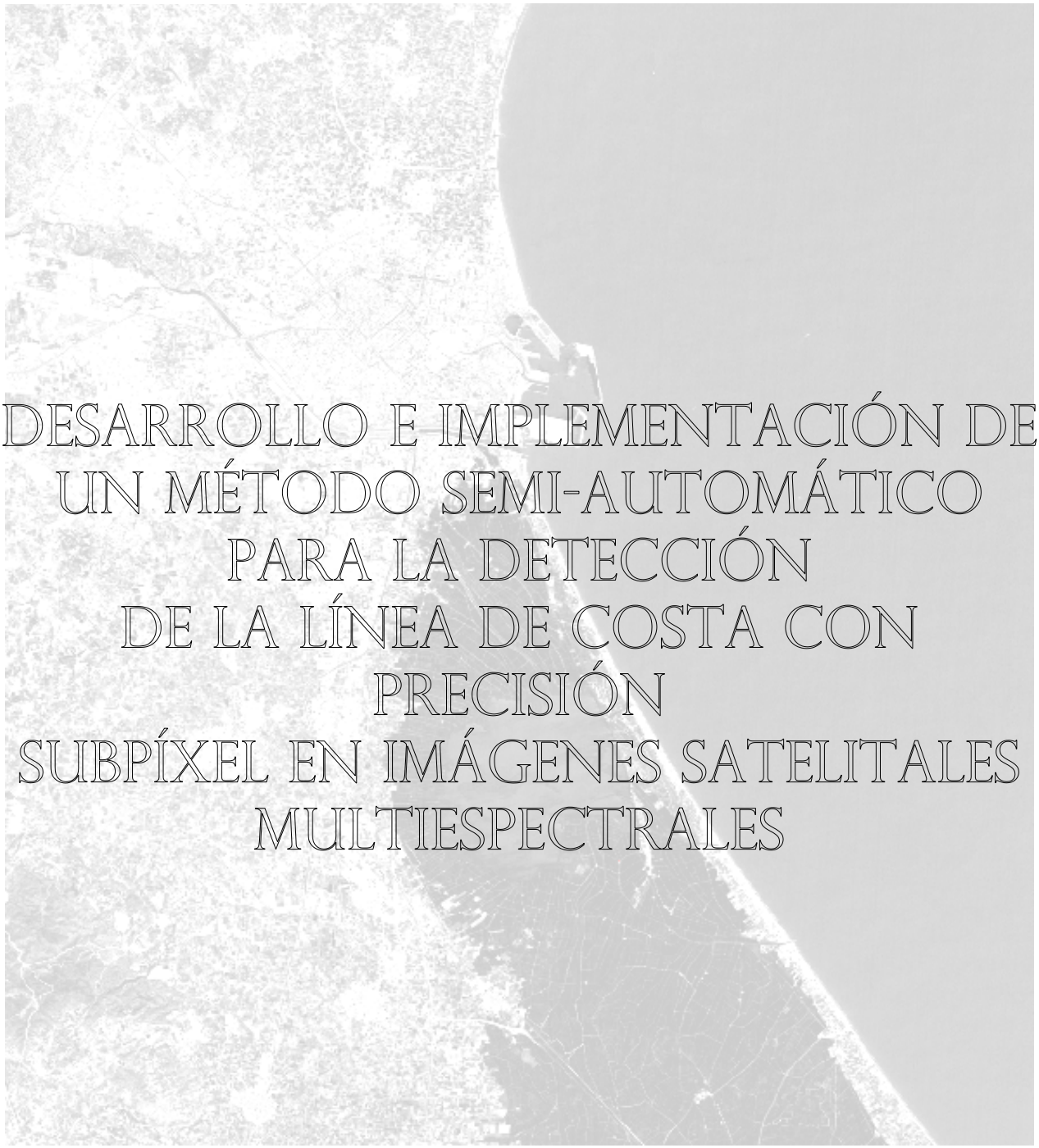
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA GEODÉSICA, CARTOGRÁFICA Y TOPOGRÁFICA



DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN DE UN MÉTODO SEMI-AUTOMÁTICO PARA LA DETECCIÓN DE LA LÍNEA DE COSTA CON PRECISIÓN SUBPÍXEL EN IMÁGENES SATELITALES MULTIESPECTRALES

Tutores: ***Luís Ángel Ruiz Fernández***
Josep Eliseu Pardo Pascual
*Autor****:Jaime Almonacid Caballer***

Llegados a este punto cabría agradecer de infinitas formas a muchísimas personas con que he topado a lo largo de todos los pasos que han llevado a poder realizar este proyecto. Este escrito no es la culminación de un trabajo fin de carrera sino de toda una época de estudios.

La principal y mayor gratitud será siempre para la familia pues han sufrido todas las consecuencias de los estudios. A mis padres, Paqui y Jaime, por darme esta oportunidad con suma paciencia y esas palabras que siempre dan los diablos más por viejos que por diablos; hay cosas que no se aprenden en las asignaturas. A mi hermana, Gloria, por aguantar un hermano peculiar y por todas esas conversaciones-discusiones consecuencia de querer utilizarla como maestra por ser una gran estudiante de ciencias físicas. Y a mis tíos, Mariola y Ricardo, porque en función de segundos padres, han tenido puntos de vista de gran peso, así como mucha complicidad y ayuda tanto profesional como personal.

No se puede dejar en el tintero a los amigos y compañeros. En geodesia, a decir verdad, se ha de ser ambas cosas a la vez, el lema "hoy por ti y mañana por mí" es algo que nos sonará siempre y la atención de unos con otros es algo seguro en el futuro profesional; son una gran familia, en especial Gemma, Bea, Beli y Eder con quienes la palabra 'convivir' ha sido más que una forma de hablar. A los amigos de toda la vida (colegio, instituto, topografía, consortes, adquiridos,…) por el interés, espero que correspondido, de cuidar que las cosas fueran siempre bien. Y a mi gente del mundo de la música (amigos, tanto compañeros como profesores) por la inmensa comprensión y ánimo para afrontar estudios tan dispares y, lejos de cuestionar, apoyar a llevarlos a buen término; estos detalles y ánimo hacen mucho más de lo que pueda agradecer aquí.

Y finalmente a los tutores Josep Eliseu Pardo y Luís Ángel Ruíz por permitirme aprender tanto y desarrollar una investigación en un campo que me ha llenado plenamente en el segundo ciclo: la teledetección y el tratamiento digital de imágenes. Es tremendamente gratificante el cambio de tener a una persona como profesor a tenerlo como tutor, como una persona que tratándote de igual a igual procura enseñarte y guiarte; en este sentido es casi una lástima terminar el proyecto; todo sea por seguir dando pasos.

***A mis padres, mi hermana y mis tíos**.*

ÍNDICE

1 . INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN 2

2 . OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DEL PROYECTO 5

2.1 OBJETIVOS 5
2.2 ESTRUCTURA DEL PRESENTE PROYECTO 5

3 . ANTECEDENTES 7

4 . EXTRACCIÓN DE LA LÍNEA APROXIMADA 13

4.1 UMBRALIZACIÓN 13
4.2 EXTRACCIÓN DE LA LÍNEA 18
4.3 AMPLIACIÓN: COMPONENTES PRINCIPALES 20

5 . MODELO DE PERFILES ESPECTRALES 24

5.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO 24
5.2 RESULTADOS MODELO DE PERFILES 27

6 . MODELO SUPERFICIAL 29

6.1 OBTENCIÓN DEL TERRENO MATEMÁTICO 31
6.2 HIPÓTESIS DE UBICACIÓN DE LA LÍNEA DE COSTA 33
6.3 RESOLUCIÓN PRÁCTICA DE LA LÍNEA A EXTRAER 35
6.4 TRATAMIENTO EXTERNO DE LO APORTADO POR VECINDARIOS 39

7 . APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE ALGORITMOS 42

7.1 ZONA, CONDICIONES Y PROCEDIMIENTO DE ESTUDIO 42
7.2 RESULTADOS 43
7.2.1 Error absoluto de posicionamiento 43
7.2.2 Efecto visual de variación del vecindario y el factor de remuestreo 48
7.2.3 Tendencia direccional del error de posición 52

8 . CONCLUSIONES 55

9 . PROPUESTAS DE TRATAMIENTO 56

9.1 PUNTO DE MÁXIMO LAPLACIANO 56
9.1.1 Perfiles a la función original 58
9.1.2 Obtención del máximo laplaciano por perfiles 60
9.1.3 Máximo laplaciano direccional 62
9.2 APLICACIÓN DE CURVAS TIPO SPLINE 66
9.3 AMPLIACIÓN DE LA TEORÍA DE ASM 68

10 . ANEJOS 70

11 . BIBLIOGRAFÍA 110

1 . INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La idea para la realización del trabajo fin de carrera la podemos encontrar de varias formas, bien sugerida por profesores, por compañeros, por ideas extraídas de algún artículo, o extensión de algún trabajo realizado durante la carrera. Este último caso es el que nos ocupa. La asignatura 'Teledetección avanzada' requería de la realización de un trabajo de iniciativa propia que requiriera cierta investigación y solventar unos objetivos que, junto con el profesor, se decidieran factibles.

El objetivo establecido fue dar solución a un problema surgido durante la realización de cierto proyecto fin de carrera de Ingeniería Técnica en Topografía. Definamos el problema: el susodicho proyecto concluía con la realización de una ortofotografía. Como es sabido, para que el resultado sea visualmente correcto se requiere una manipulación de los colores. El problema surgía en el momento en que, buscando una combinación que visualizara bien la zona terrestre, la zona marina quedaba bandeada. ¿Qué requería este problema? Separar las zonas terrestre y marina para manipularlas de forma diferente; recordemos que se trata de una manipulación de visualización que en nada afecta a la precisión métrica de la ortofoto. Llegado el punto de separar ambas zonas mediante ROIs (áreas de interés) para realizar el tratamiento diferente, se buscó una forma automática de diferenciar mar y tierra, dado que siendo superficies tan diferentes, cabía esperar que existiera un método automático para hacerlo, sin resultado favorable. El proyecto se acabó delimitando las zonas a mano, con el tiempo que ello requiere.

El objetivo en la asignatura fue la investigación de los métodos existentes para realizar tal delimitación de la forma más directa y automática posible. Se pudo dar solución rápida a este problema pero, realizando tal trabajo, se pudo comprobar la importancia que a un nivel mayor tiene la detección de la línea de costa. Pensemos que a nivel ***administrativo*** la línea de costa es punto de referencia legal en ciertas cuestiones, y siendo un elemento dinámico requiere ser actualizado de forma periódica condicionando las acciones legales de cada país respecto a ella (*Overview of beach nourishment in the european union projects, practices and objectives* [8]) y todo ello condiciona los medios y métodos para ello con un coste de tiempo y recursos a tratar. Añadiendo la vertiente ***científico-técnica*** los enfoques son variados, pero llegados a un caso extremo se puede encontrar los efectos de un tipo de costa en forma de acantilados en EEUU con sustrato blando que se retrae con rapidez ante la erosión marina provocando desprendimiento de construcciones costeras (*The impacts of coastal armoring [10]*). También podemos encontrar interés por monitorización de cambios en deltas (*Remote Sensing Monitoring of Coastline Change in Pearl River Estuary* [5] y en *The dynamic remote sensing monitorin of eight outlets in peral river estuary* [6]). En estudios de recursos, turismo, geomorfología, mareas, etc se requiere de una forma u otra el conocimiento de esta línea. Aún más y en tercer lugar, existen ***otros intereses*** no directamente imaginables que también requieren la detección de la línea de costa, por ejemplo se ha encontrado cierto artículo (*Matching of aerial coastline images with map data using dynamic programming, [12]*) que trata de encontrar elementos iguales de la costa en imágenes y cartografía (es un interesante estudio que se adentra en código cadena y descriptores de Fourier). No es el único caso pues para verificar el posicionamiento de un satélite como el AIRS se sugiere el empleo de la línea de costa (*Verification of AIRS boresight accuracy using coastline detection, [17]*).

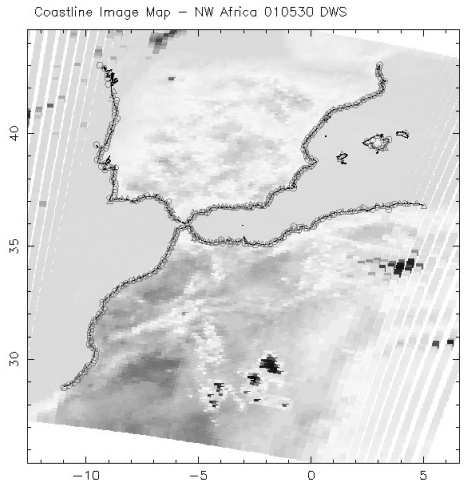


Figura 1. Empleo de la línea de costa como elemento geométrico para georreferenciar.

La necesidad de trabajar y detectar la línea de costa queda por tanto justificada. Ahora bien, ¿Qué coste está conllevando? ¿Con qué precisión se está consiguiendo? Llama la atención la cantidad de intentos de detectar la línea de costa mediante radar o sensores ópticos con multitud de métodos que en adelante nombraremos. Pero llama aún más la atención el saber que la delimitación de la línea de costa en Valencia se está realizando a mano, mediante digitalización sobre fotografías aéreas. ¿Porqué no emplear algún método automático sobre tales imágenes? Posiblemente porque no se había pensado en ello. Y por otro lado, si el coste de vuelo es alto ¿por qué no aprovechar satélites para hacerlo? Posiblemente porque se requiere más precisión que la que aportan. Este último problema cabe resaltarlo dado que es uno de los problemas que el departamento de Cartografía y Fotogrametría tiene en sus estudios de evolución geomorfológico; en concreto procuran encontrar el método por el que poder estudiar la evolución de las costas de la Comunidad Valenciana aprovechando imágenes satelitales disponibles desde los primeros satélites multiespectrales pero con la carencia de que no disponían en su momento la resolución geométrica necesaria. *Las imágenes por satélite con buena resolución son muy caras, y aquellas con menor coste no aportan la resolución necesaria.*

En estas vías movemos el trabajo. En la búsqueda de un ***método automático*** en la medida de lo posible, que abarate el trabajo. Pero aún más, presentaremos las hipótesis para obtener precisión mayor que la propia resolución de cada imagen. La ***precisión subpíxel*** permitiría aprovechar imágenes de menor resolución con precisiones mayores, y aún más, el posible empleo de imágenes antiguas que no tenían la resolución de satélites actuales, posibilitando estudios evolutivos desde puntos más lejanos en el tiempo

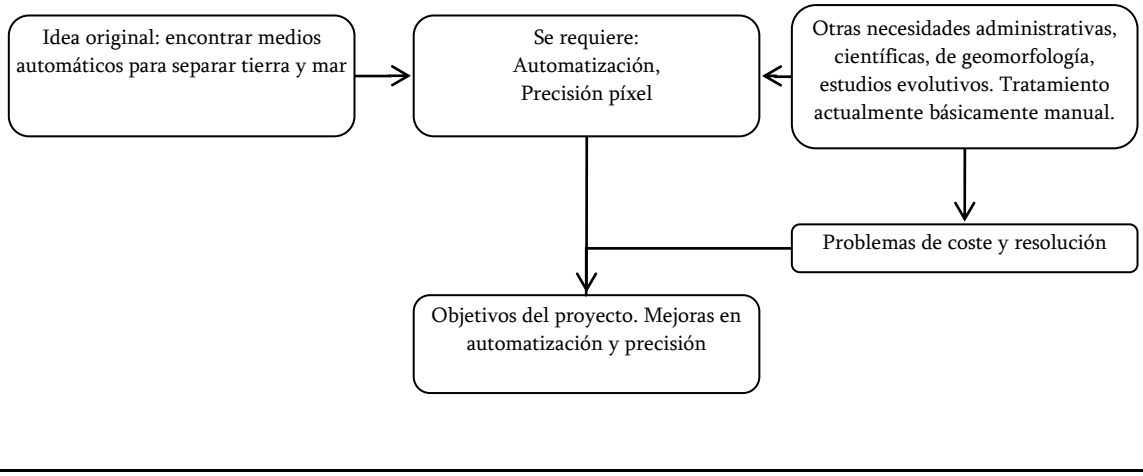


Figura 2. Generación de los objetivos del presente proyecto.

2 . OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DEL PROYECTO

2.1 Objetivos

Podemos cifrar una serie de objetivos que abarcan la realización del trabajo y la presente memoria:

-Dada la hipótesis de que la línea de costa recorre una zona de inflexión, desarrollar la matemática para obtener esa línea de inflexión: primero como puntos de inflexión a perfiles a una línea de costa aproximada, y segundo como anulación del laplaciano a un vecindario concreto alrededor de esa misma costa aproximada.

-Evaluar la teoría de perfiles espectrales.

-Evaluar la teoría de anulación del laplaciano mediante resultados numéricos.

-Sugerir y desarrollar otros medios para la obtención de la línea de costa.

2.2 Estructura del presente proyecto

Incluyamos este apartado para aclarar el planteamiento que va a seguir el proyecto. Intentaremos realizar un planteamiento lo más lineal posible, aunque las ideas en general siempre hayan venido entrelazadas, se ha buscado un camino en que cada paso genere la duda o el interés que requiera el paso siguiente.

Comenzaremos planteando los antecedentes para cifrar el estado actual. Y en lo referente a nuestro propio proceso cabe aclarar que la precisión subpíxel buscada se basa en la *corrección respecto a un resultado somero inicial*. ¿Qué significa eso?, Intentaremos en un primer paso encontrar una línea que recorra con la precisión píxel, propia del sensor, el área de la línea de costa. Un leve error de tal línea adentrándose en la tierra o en el mar no nos habrá de importar.

Para afinar la solución se parte recorriendo los puntos de la línea aproximada. La primera opción es tomar un perfil perpendicular a ese punto y sacar de ese perfil, mediante matemáticas, el punto de inflexión, donde en teoría encontraremos la línea de costa. La segunda opción es tomar un vecindario alrededor de cada píxel y evaluar entonces la anulación del laplaciano.

Seguidamente se expondrán los resultados de lo mencionado anteriormente sacando las conclusiones oportunas. Finalmente, dado que este es un proyecto teórico, se expondrá otros modelos matemáticos y/o sugerencias de cálculo para obtener la precisión subpíxel buscada.

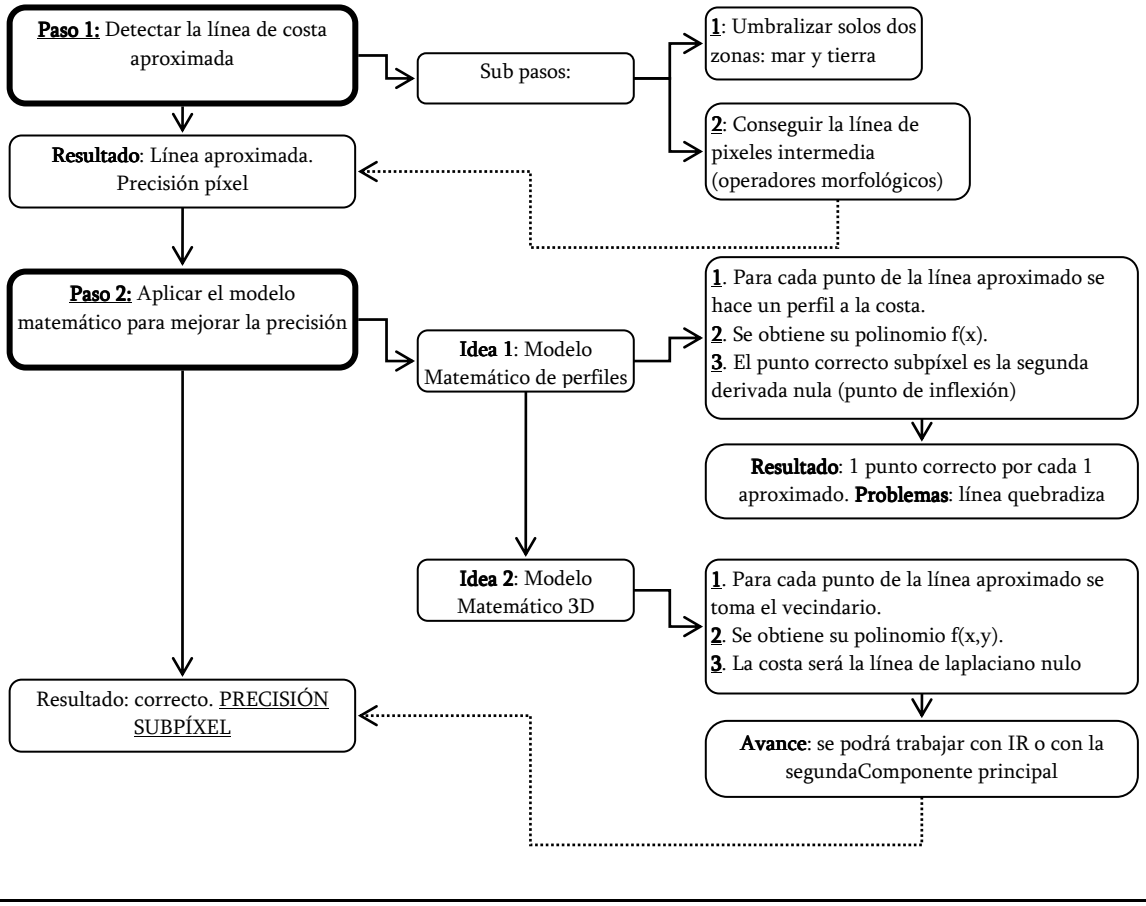


Figura 3. Esquema conceptual básico para el seguimienteo del trabajo del presente proyecto

3 . ANTECEDENTES

Ha habido una aproximación desde diversos puntos de vista al problema que nos ocupa. En lo que a teledetección se refiere, tenemos ejemplos tanto desde RADAR como desde sensores multiespectrales. Como punto de partida se asume que los sensores ópticos, conteniendo bandas sensibles a los IR, son la mejor opción ([1], [5], [6], [7], [19], [23], [24]), aunque el trabajo con sensores RADAR ([12], [13], [20]) también está extendido muy probablemente por cuestiones de economía. No pudiendo olvidar que la detección de la línea de costa también es necesaria para trabajos con otros sensores como NOAA, CORONA ó AIRS para fines varios ([4], [7], [17])

En principio no pensaríamos en informarnos sobre las técnicas RADAR, pero siempre es posible encontrar en otros campos alguna idea que sea extrapolable a nuestro interés; en este caso no ha sido así, pero no existe ninguna idea despreciable.

En lo referente a la extracción de la línea de costa también hay una buena dosis de imaginación. La opción más sencilla y que cabe nombrar, por poco útil que nos sea, es la opción de extracción de la línea de costa manualmente ([7]). En el artículo "*Método para la elaboración de mapas representativos del pasado hidrobiológico de aguas oceánicas usando imágenes de la seria NOAA a partir de filtros paso-alto*"[4], se menciona un medio por el que mediante filtros DoG y CSED se extrae propiedades de bordes de imágenes del mencionado satélite satélite que, siendo un sensor principalmente para objetivos climáticos, se sirve de la línea de costa aunque sin mencionar la forma de extraerla. No obstante, abre puertas a descubrir que mediante texturas y filtros sí se han desarrollado trabajos para extraer la línea de costa.

¿Cuál es la filosofía para extraer la línea de costa mediante estos filtros? Nos encontramos ante dos medios (los filtros para resaltar bordes y los análisis de texturas) que se basan en el mismo principio. Dada una imagen satelital que contenga mar, es sabido que la zona marina llama la atención por se mucho más homogénea que la marina. Como resultados esperables encontramos que al realizar un filtro de detección de bordes (canny, sober, local-zero, etc) la zona marina quede exenta de ellos, que la zona terrestre muestre bordes internos y a su vez, la interfaz tierra-mar sea localizada con un gran borde. Con esta idea, en *Optimisation of a coastline extraction algorithm for object-oriented matching of multisensor satellite imagery* [13] se realiza la extracción de la línea de costa para sus fines.

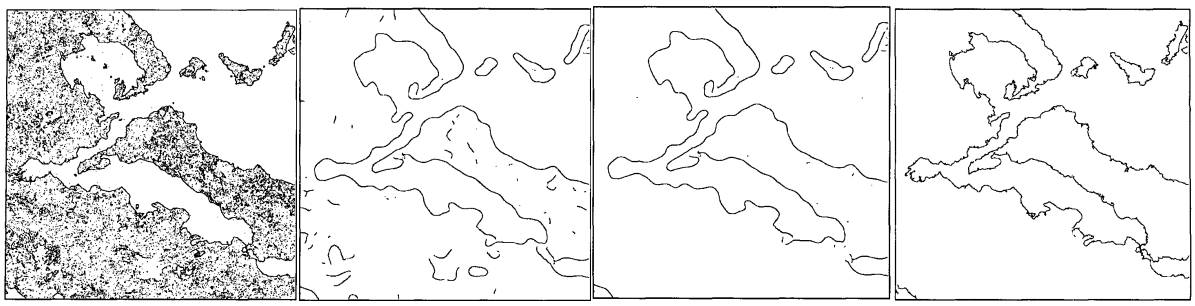


Figura 4. Evolución del proceso de extracción de la costa en el artículo [13]. Realizado el filtro de detección de bordes Canny, se realiza un filtrado consecutivo de los mismos para quedarse con la línea buscada.

Las texturas, por su parte tratan de evaluar la homogeneidad o heterogeneidad de los niveles de gris en derredor de un píxel de la imagen. Lógicamente, la zona marina

volverá a destacar por la tremenda semejanza y homogeneidad de esta propiedad. Llevado al extremo encontramos su aplicación en imáganes RADAR en *Matching of aerial coastline images with map data using dynamic programming* [12]: se trata de un artículo donde el objetivo es la localización de elementos análogos extraídos de la línea de costa y de cartografía existente (como medio de georreferenciación mutua es posiblemente una de las mejores opciones, para ello busca la comparación de las dos entidades geométricas mediante código cadena y descriptores de Fourier, lo que da a entender que es una artículo muy amplio), de modo que, para la extracción necesaria de la línea de costa de las imágenes SAR de que dispone, trata de emplear texturas aunque no en la versión más simple que podamos pensar (aplicar las matrices de ocurrencias y co-ocurrencias) sino que realiza un tratamiento de descomposición en Wavelets para aplicar las texturas (Haralick) sobre la misma; hecho tal análisis, la forma de extraer la línea es mediante 'segmentación'. Como es lógico, dado que las texturas miden la homogeneidad o heterogeneidad de la superficie tratada, la zona marina mostrará valores oscuros que la diferenciarán de la zona terrestre, así pues mediante una segmentación en la que los valores oscuros se aúnen en un mismo 'objeto' (en este artículo con la técnica de crecimiento 'growing') se podría cerrar y determinar el área marina.

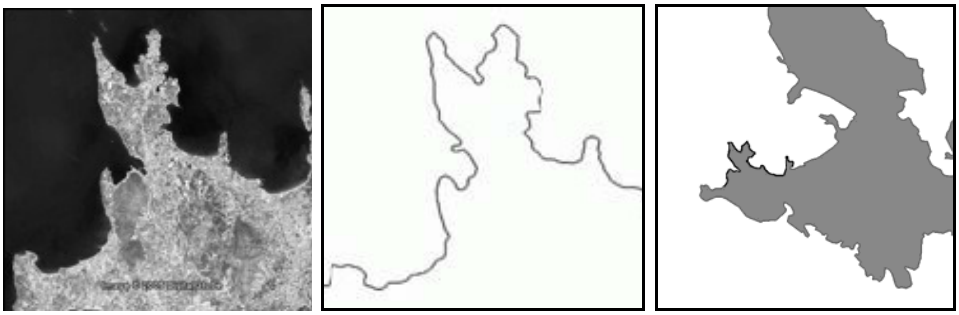
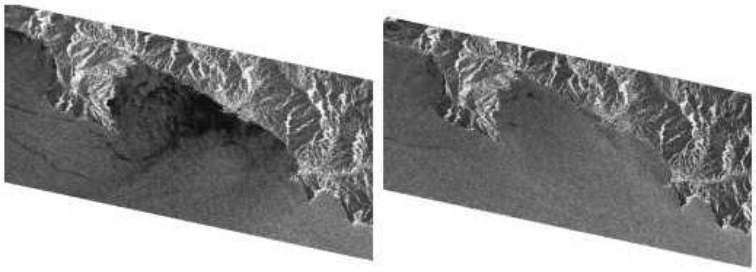


Figura 5. Curioso objetivo de extracción de la línea de costa en el artículo [12]. Se trata de detectar la línea de costa y localizar mediante código cadena, descriptores de Fourier, etc. las zonas de coincidencia geográfica

Continuando con el interés de separar las zonas de mar y tierra no ha sido el único caso de segmentación mediante 'growing'. En *Coastline extraction in remotely sensed images* [14] se realiza un trabajo por estos medios.



Figures 1-2: SAR images acquired by ERS-1 and ERS-2 September 1995, representing the eastern Ligurian coast, near Genoa, Italy.

Figure 3: High resolution images acquired from aerial platform during 1998 representing the eastern Ligurian Coast, near Genoa, Italy

Figura 6. Figuras extraídas del artículo 14. Se propone la extracción de la línea de costa en dos imágenes de RADAR y medir su precisión comparando con la línea obtenida de un vuelo.

No son pródigos en dar detalles del método de segmentación. La idea es extraer la línea de costa por tal procedimiento en dos imágenes RADAR ERS de 25x25 metros de resolución y cifrar a posteriori su acierto extrayendo la línea de costa de la imagen dada por un vuelo. Tal línea de referencia es extraída por clasificación; aunque no se presta atención a la precisión de la línea de referencia se considera muy superior a la esperable en RADAR con lo que cumple sobradamente su función.

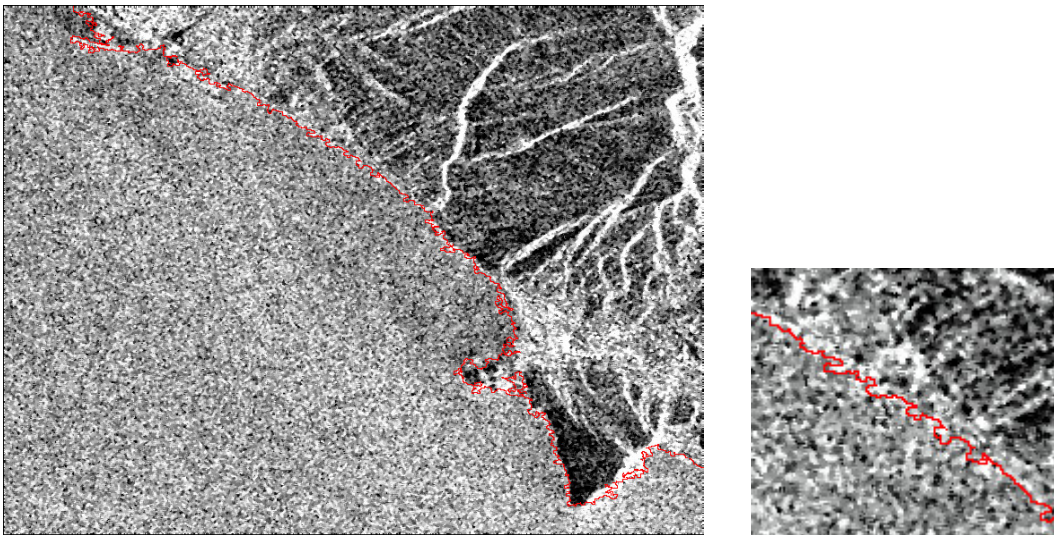


Figura 7. Imagen RADAR y detalle conteniendo el resultado de la extracción de la línea de costa mediante el mencionado proceso de segmentación 'growing'. Esta es la línea a evaluar con la obtenida de la imagen aérea.

De este modo, tomando esa imagen aérea como referencia han podido cifrar el error de extracción de la línea de costa en la imagen RADAR en 3.5 píxeles de desviación (cabe mencionar que su resolución geométrica es de 25x25 metros), sin necesidad de extendernos en valoraciones, equivaldría a unos 75 metros de error.

Indirectamente se ha mencionado que la imagen aérea anterior es clasificada. Entramos así a poder comentar otro medio para extraer la línea de costa de una imagen. Efectivamente la clasificación (supervisada o no) de una imagen es otro método empleado para nuestro fin. En *Morphological automatic extraction of pan-european coastline from landsat ETM+ images* [19] se menciona que la clasificación y la segmentación son métodos muy cercanos entre sí, aunque se decanta por la primera

El método de clasificación para imágenes provinentes de sensores ópticos es empleada en *Remote Sensing Monitoring of Coastline Change in Pearl River Estuary* [5] y en *The dynamic remote sensing monitorin of eight outlets in peral river estuary* [6], donde se busca realizar un estudio de la evolución del río Pearl, uno de los más grandes de china, empleando imágenes Landsat de los años 70 (con 80m de resolución).

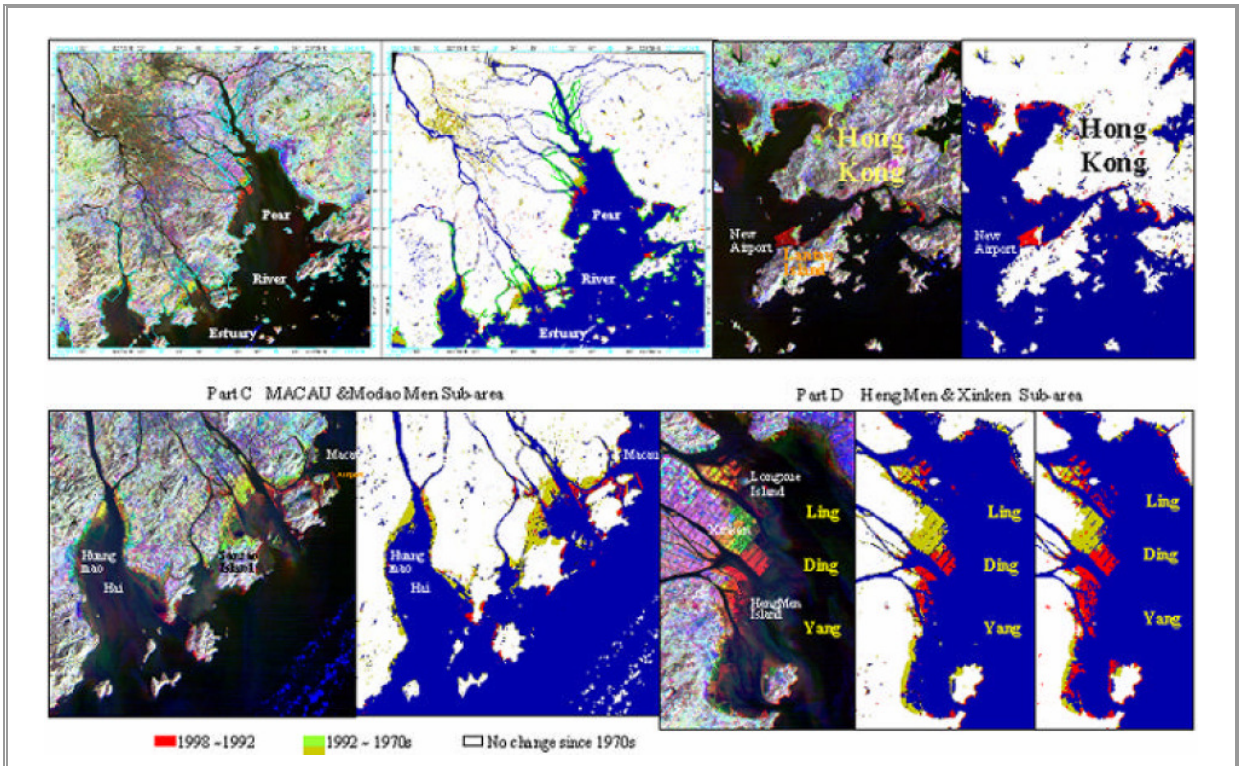


Figura 8. Proceso de detección de cambios entre imágenes Landsat desde los años 70 en el estuario de l río Pearl de China.

El proceso de clasificación queda justificado especialemente en este caso pues la zona cercana al río contiene también aguas turbias que cabe diferenciar. En cuanto a precisión nos quedamos con dos aspectos en su análisis: en primer lugar, cifran su precisión para extraer la línea marina en 1.97 píxeles. Y, en segundo lugar, cifran la posibilidad de detectar cambios siempre que sean mayores a 60 metros.

Finalmente, la idea más extendida es el empleo de la banda de infrarrojos de los sensores ópticos, y el sensor más empleado para tales experimentaciones, el LandSat. La principal opción comentada en la tesis doctoral *The application of GIS and RS for Coastline Change Detection and Risk Assessment to enhanced sea level rise* [23] es la de tomar el histograma y establecer simplemente un umbral que, aprovechando los bajísimos niveles digitales que toma el IR en el mar, divida en dos la imagen

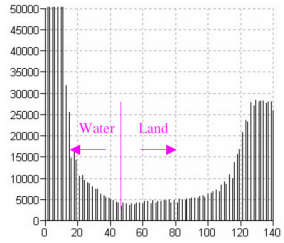
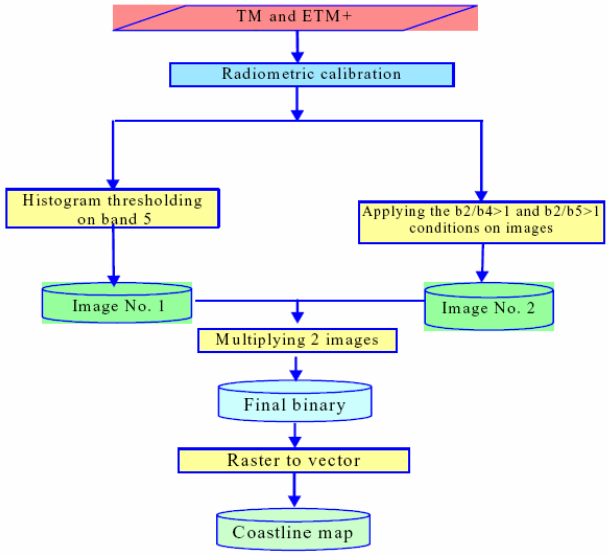
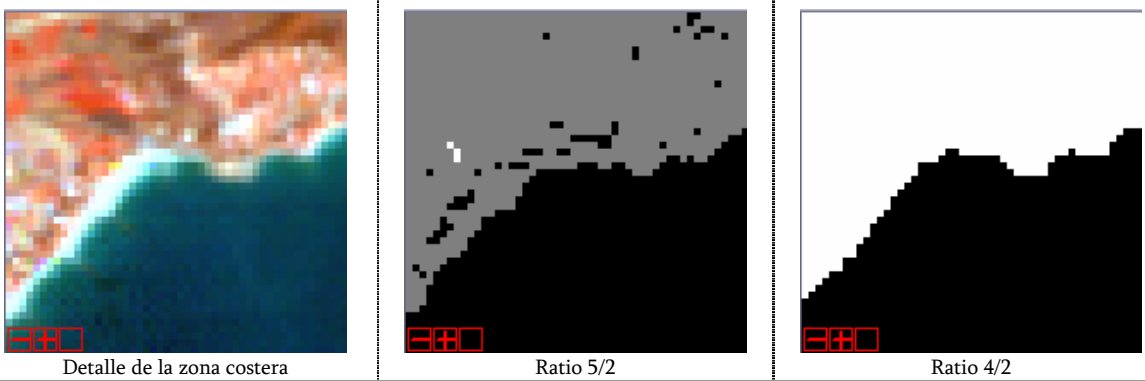


Figura 9. La idea de umbralización consiste en que los píxeles con mayor o menor valor de cierto umbral sean considerados como tierra o mar. Figura tomada de la tesis [23].

Esta idea sencilla establecería por sí mismo una solución rápida al problema de distinción de zonas que se mencionó al principio del presente trabajo. Pero aún más, en *Coastline change detection using remote sensing* [15] se ofrece otra opción para poder umbralizar sin tener que seleccionar ese umbral, según esa propuesta, la división de las bandas 5 y 2 de LandSat tiene por resultado dos únicos valores que son la binarización directa:



Esquema propuesto en el mencionado artículo, cuyo objetivo pasa por detectar el mar en dos imágenes para estudiar la diferencia de zona marina entre ambas mediante una multiplicación de la imagen binaria que se hubiera obtenido en el paso anterior.



Detalle de la zona costera | Ratio 5/2 | Ratio 4/2

Figura 10. Muestra de los ratios sugeridos en el artículo [15]. Efectivamente, aplicándolo nosotros verificamos el resultado auténtico.

Adelantamos el resultado visual de este ratio, aunque posteriormente será retomado. Se cuestionará este resultado y se mostrarán experimentaciones. La precisión asociada para este estudio es de 1.3 píxeles (39 m. en imágenes de 30 m. de resolución).

A modo de conclusión de los antecedentes:

-La necesidad de extraer la línea de costa es patente para muy diversos fines y se ha ingeniado métodos muy diversos e imaginativos para ello.

-Cualitativamente se ha trabajado con todo tipo de sensores y cada uno plantea dificultades muy diversas, desde la heterogeneidad del RADAR, el buen umbral de los IR, el condicionamiento si se ha de detectar más zonas en la imagen o si las imágenes son de sensores antiguos como CORONA o las primeras versiones de LandSat.

-Cuantitativamente son pocas las precisiones dadas pero en global tenemos: 3.5 píxeles (75 m. aprox.) en estudios de RADAR. Y el mejor resultado con LandSat de 1.3 píxeles (39 m).

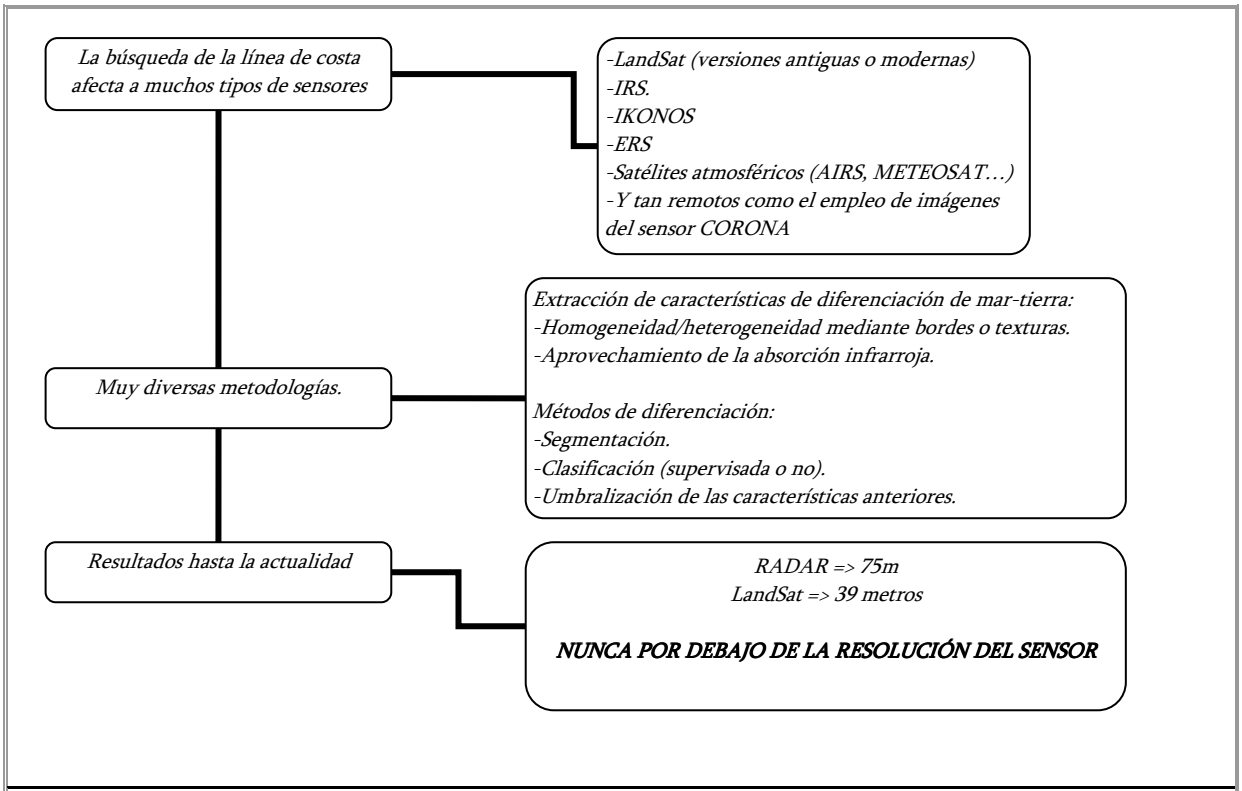


Figura 11. Estado actual de la investigación de la línea de costa.

Por encima de todo, la conclusión es clara: **no se ha realizado estudios que busquen la mejora de la resolución propia de cada sensor, no existiendo, por tanto, resultados que consigan mejorarla.**

4 . EXTRACCIÓN DE LA LÍNEA APROXIMADA

4.1 Umbralización

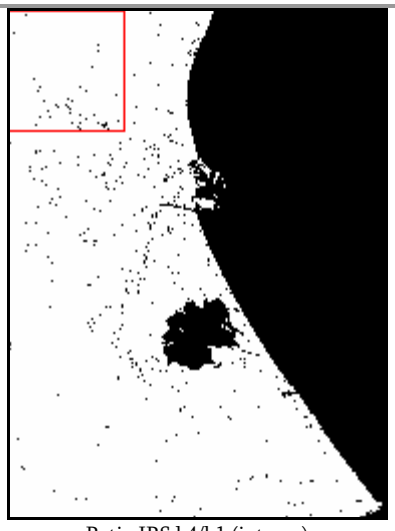
Comenzamos ahora con el trabajo propio realizado. El que fuera objetivo inicial de separar las dos zonas de tierra y mar decíamos que queda subsanado bajo dos sugerencias: umbralizar el IR o bien mediante división entre bandas. De entre estas dos opciones comprobemos en el cuadro del apartado anterior que, efectivamente, si dividimos las bandas 4 o 5 entre la 2, se obtiene con mayor o menor detalle una binarización directa de las dos zonas.

Siguiendo el camino del ratio, el siguiente objetivo sería poder generalizar sus resultados a otras imágenes. Así que se prueba a llevar estos ratios a la imagen IRS. Pero los ratios no pueden realizarse de cualquier manera, comprobemos a qué longitudes de onda es sensible cada banda de LandSat y de IRS para obtener el paralelismo adecuado(no se contabiliza la banda pancromática de IRS como banda1).

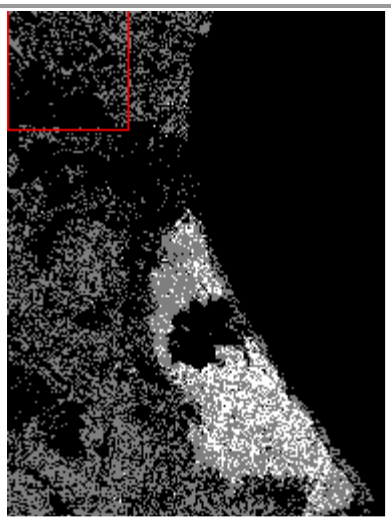
LandSat	IRS
Banda2: 0.525-0.605µm - 30m	Banda1: 0.52-0.59 µm - 23.5m
Banda4: 0.750-0.900 µm - 30m	Banda3: 0.77-0.86 µm - 23.5m
Banda5: 1.550-1.750 µm - 30m	Banda4: 1.55-1.70 µm - **70.5m**

Figura 12. Comparación LandSat e IRS

En la figura siguiente (Figura 12) tenemos la observación de los ratios en IRS. El ratio que funciona correctamente es el de las bandas 5 y 2 de LandSat y aquellas bandas de sensibilidades equivalentes, como demuestra el ratio en IRS (Figura 13):



Ratio IRS b4/b1 (integer)



Ratio IRS b3/b1 (integer)

Figura 13. Detalle del resultado que produce la aplicación de ratios entre bandas a las imágenes IRS

Ahora bien, cuando se realizan estas pruebas surge una cuestión, observemos que la banda 4 trabaja con 70.5 metros de resolución. Es decir, se está empleando la banda con peor resolución espacial de este sensor. Si bien el hallazgo no es desdeñable, y por ello se ha mostrado, resultará lógico realizar más pruebas y búsquedas.

El siguiente punto no nos hace abandonar la idea del ratio sino ser escépticos respecto a él. Cuando realizamos un ratio, lo que estamos llevando a cabo es la división directa en cada píxel de los valores de las bandas implicadas. ¿Desde cuando una división de

dos números, cada uno de los cuales puede tomar valores de 0 a 255, da como resultado solo dos opciones?, es una duda razonable que en el artículo (*Coastline change detection using remote sensing* [15]) del que se extrae esta idea no se menciona nada en absoluto. La respuesta la tenemos en el formato en que hagamos la división, esos dos únicos valores surgen si hacemos la división en tipo 'integer' o 'números enteros', el redondeo al entero más próximo lleva a esta aparente umbralización. De acuerdo con ello hay dos conclusiones: primera, parece un tanto inconsistente y poco robusto dejar que nuestra umbralización quede a merced del formato de la división aún cuando con LandSat (e IRS) haya dado buen resultado; y segunda, este ratio contiene en sí un significado que si realizamos la división en 'punto flotante' debe seguir patente de alguna forma. Si observamos una muestra de un perfil espectral como el que sigue:

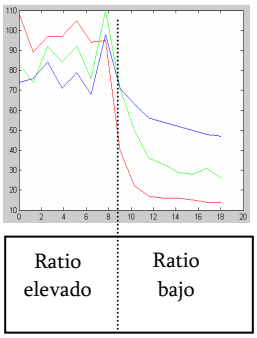


Figura 14. Comportamiento del ratio. Se observa el cambio claro de comportamiento entre mar y tierra.

El ratio se realizaría dividiendo la línea roja y la verde. Se observa que en la zona terrestre el IR toma valores mayores que el verde (valores de ratio mayores que 0) y que en la zona marina el verde supera al IR (valores de ratio menores que 0). Si otros sensores tuvieran bandas de similares características, tal vez el ratio en números enteros no llevara a una binarización directa pero sí podríamos esperar el último comportamiento mencionado. De todos modos, ¿cómo aprovechamos esta última característica?, en vez de simplemente realizar la división, se realizaría tal ratio en 'punto flotante' para después umbralizar al igual que se sugería con la sola banda infrarroja. Efectivamente se probó a realizar el ratio y binarizar la imagen, ahora bien para detectar el umbral se empleó una función propia de matlab (*graytresh*), el estudio que esta función realiza sobre la imagen no queda claro ni completamente bajo control lo que nos lleva nuevamente a buscar otras opciones. Aún con todo se realizaron diversas pruebas para que, exagerando la propiedad vista del ratio entre bandas, ese detector automático de umbrales lo tuviera más sencillo. Estos ensayos se encuentran en los anejos (pg.70), pero en su momento se concluyó no emplear estos experimentos dado que otras ideas ofrecían menos problemas.

La siguiente idea surge como búsqueda de una solución a las imágenes IRS. Este sensor contiene dos bandas sensibles a diferentes zonas del IR, las bandas 3 y 4 de la Figura 10. El infrarrojo que mejor destaca el mar es el de la banda 4:

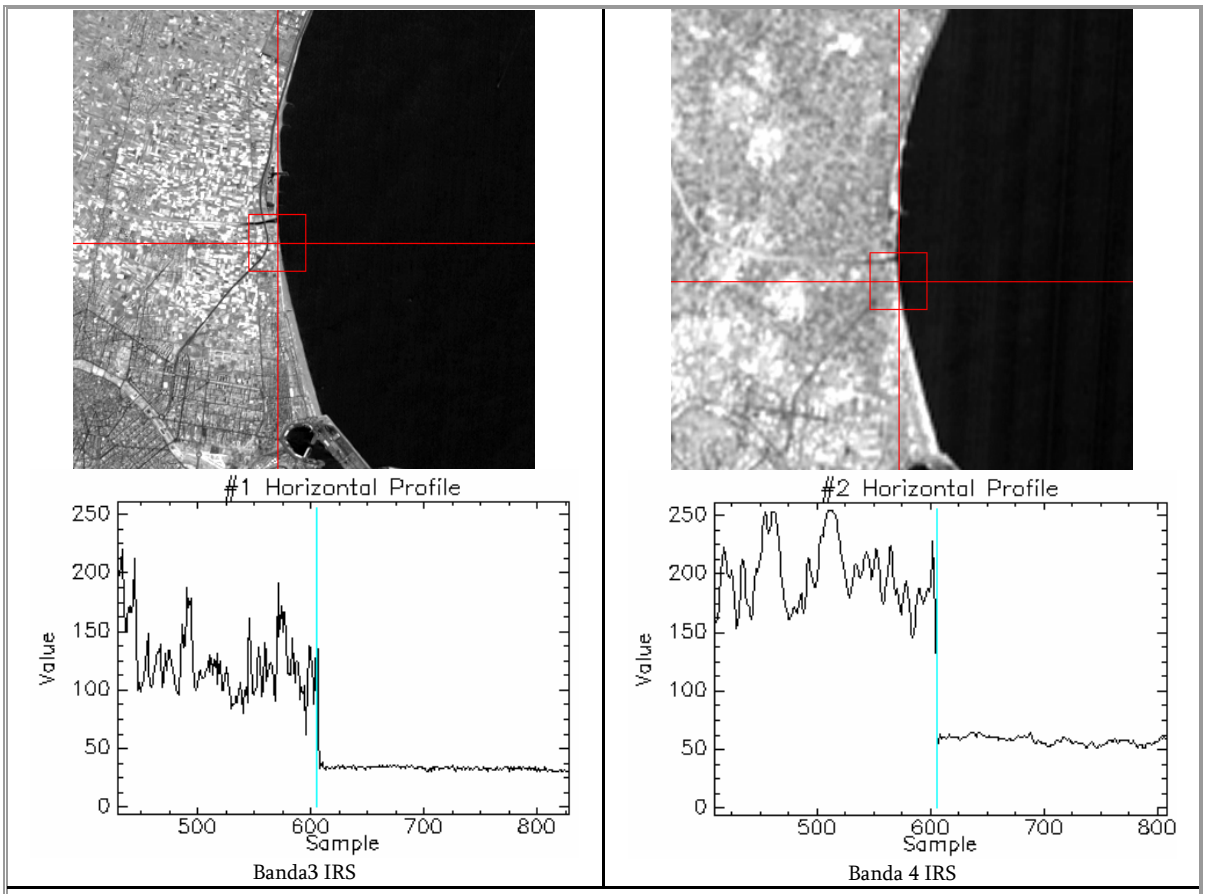
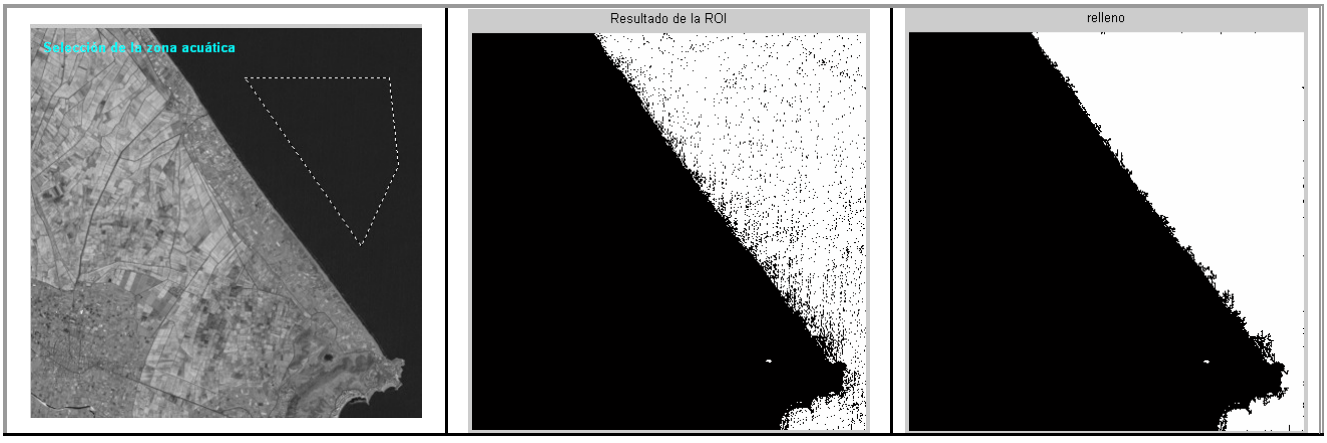
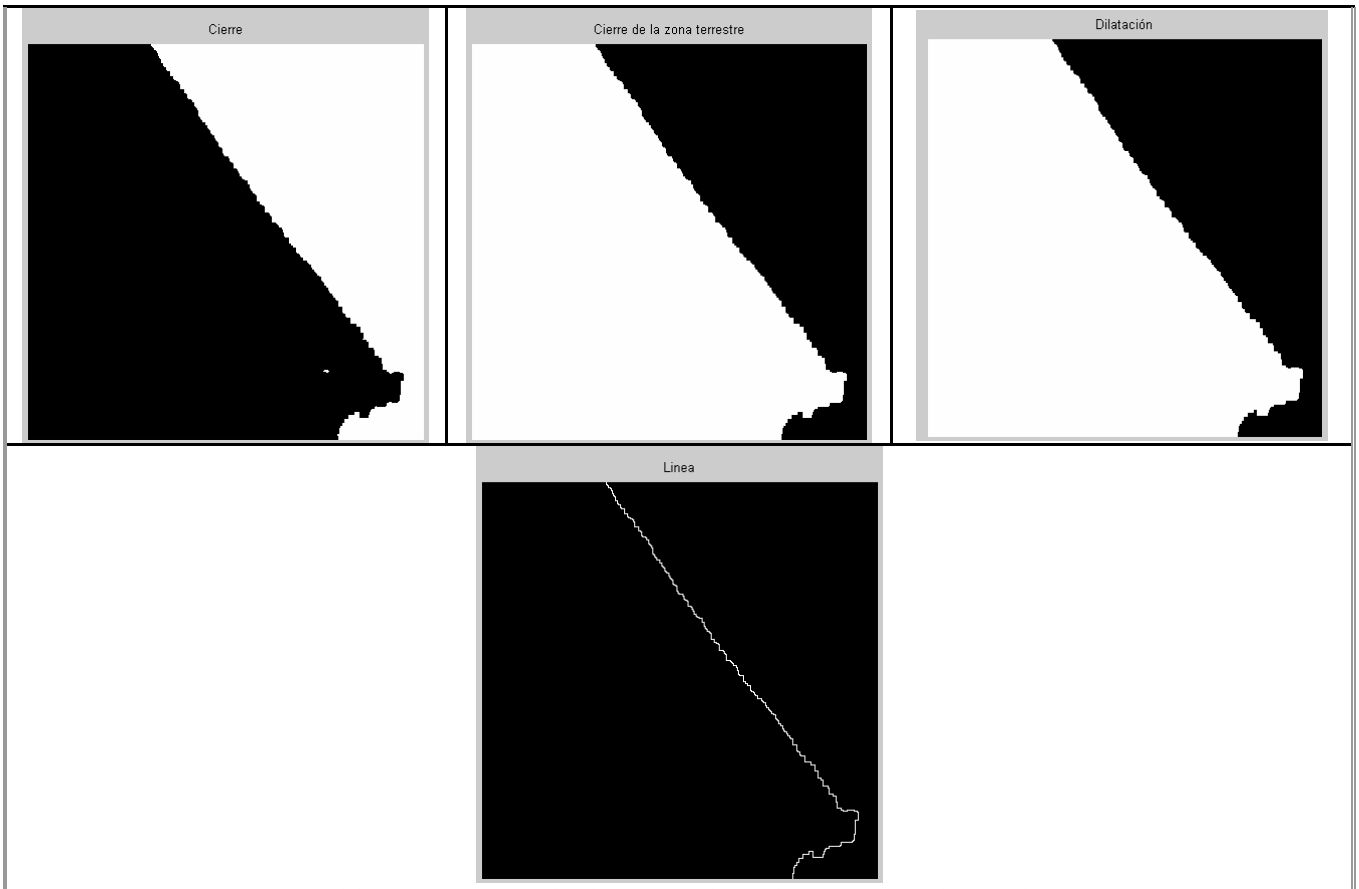


Figura 15. Mostramos el detalle del perfil espectral en los dos infrarrojos de IRS, Es así que la diferenciación marina es mucho más patente en la última banda aunque tenga en contra ser la de menor resolución espacial.

Por resolución y calidad de esa banda 4, ha de quedar desechada y se busca una forma de aprovechar la banda 3 de IRS. Se decide probar una ROI que seleccione el área marina, y para seleccionar los píxeles de la imagen que deben ser clasificados como mar podemos tomar la media y la desviación de los píxeles seleccionados. Los píxeles encerrados en $(\mu_{ROI} - n \cdot \sigma_{ROI}) \leq pixel \leq (\mu_{ROI} + n \cdot \sigma_{ROI})$, serán los que clasificaremos como mar. Donde n es un número como parámetro con el que poder trabajar; realmente es tomar un margen mayor o menor alrededor de la media. La operación se representa en el siguiente cuadro (Figura 16):





Se trata del proceso completo, cabe observar que el procedimiento requiere dos fases de cierre

Figura 16. Proceso completo de obtención de la línea de costa aproximada en IRS

Tras tomar la ROI y seleccionar los píxeles oportunos para que formen parte del mar se hace necesario cerrar los espacios mal seleccionados mediante dos operaciones de relleno consecutivas. Aunque en principio no tiene por qué ser una mala solución, podemos ofrecer una última opción.

Según se ha visto, lo último que queda por comprobar es el único empleo del infrarrojo umbralizándolo. Dado que no se va a poder automatizar del todo esta parte, poco importa dejar en manos del usuario el seleccionar el valor del umbral. De todas formas, si probamos que 'matlab' binarice la imagen con la orden automática ya mencionada *graytresh*, el resultado no es satisfactorio, pero ¿y si podemos aprovechar algo de lo mencionado anteriormente para generar nuestro propio umbral automático?

Lo primero es que observemos el histograma de imágenes de IR (Figura 17):

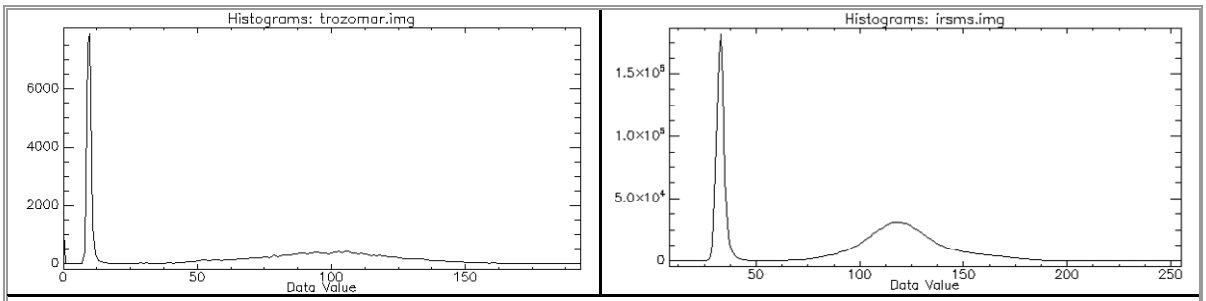
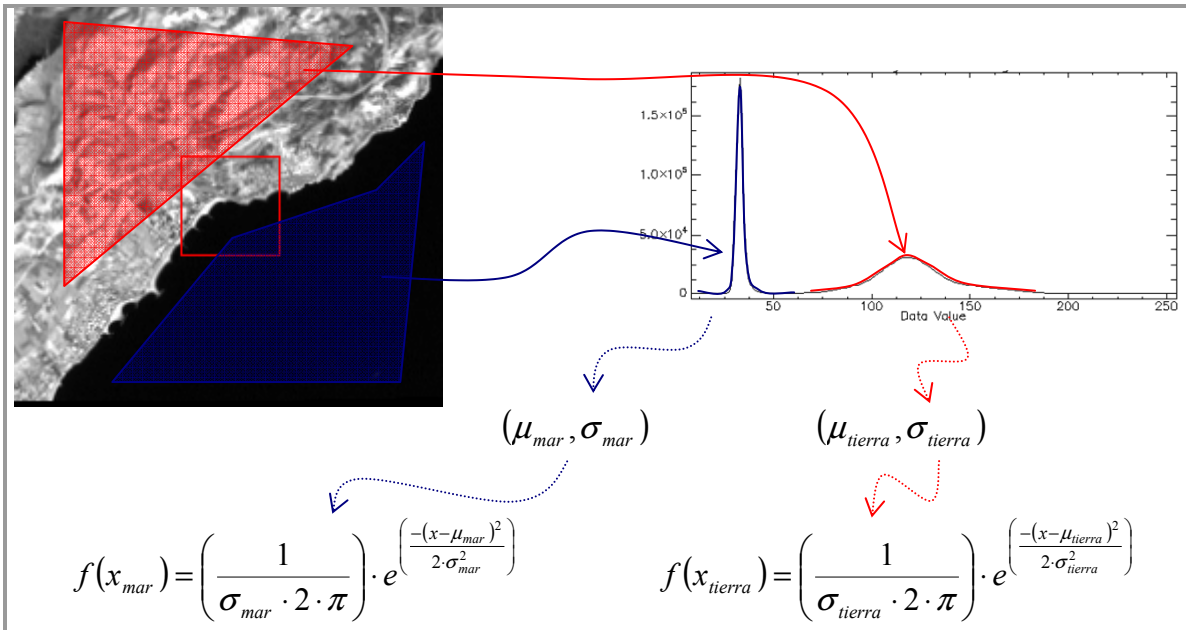


Figura 17. Histogramas LandSat e IRS. Se observa dos campanas en cada histograma, lo que nosotros emplearemos para poder separar mar y tierra

Se observa dos curvas claras que vienen provocadas por las respectivas zonas de mar y tierra. Se asemejan mucho a campanas de Gauss. Si en vez de pensar en una ROI

pensamos en dos y sus respectivas campanas de Gauss, podremos calcular su intersección (Figura 18):



$$(\mu_{mar}, \sigma_{mar}) \qquad (\mu_{tierra}, \sigma_{tierra})$$

$$f(x_{mar}) = \left(\frac{1}{\sigma_{mar} \cdot 2 \cdot \pi}\right) \cdot e^{\left(\frac{-(x-\mu_{mar})^2}{2 \cdot \sigma_{mar}^2}\right)} \qquad f(x_{tierra}) = \left(\frac{1}{\sigma_{tierra} \cdot 2 \cdot \pi}\right) \cdot e^{\left(\frac{-(x-\mu_{tierra})^2}{2 \cdot \sigma_{tierra}^2}\right)}$$

La intersección de ambas será, el punto de intersección de las dos curvas, luego será una forma automática de obtener el punto de umbral.

$$\left(\frac{1}{\sigma_{mar} \cdot 2 \cdot \pi}\right) \cdot e^{\left(\frac{-(x-\mu_{mar})^2}{2 \cdot \sigma_{mar}^2}\right)} = \left(\frac{1}{\sigma_{tierra} \cdot 2 \cdot \pi}\right) \cdot e^{\left(\frac{-(x-\mu_{tierra})^2}{2 \cdot \sigma_{tierra}^2}\right)}$$

$$\left(\frac{\sigma_{tierra} \cdot 2 \cdot \pi}{\sigma_{mar} \cdot 2 \cdot \pi}\right) = \frac{e^{\left(\frac{-(x-\mu_{tierra})^2}{2 \cdot \sigma_{tierra}^2}\right)}}{e^{\left(\frac{-(x-\mu_{mar})^2}{2 \cdot \sigma_{mar}^2}\right)}} \Rightarrow \ln\left(\frac{\sigma_{tierra} \cdot 2 \cdot \pi}{\sigma_{mar} \cdot 2 \cdot \pi}\right) = \left(\frac{-(x-\mu_{tierra})^2}{2 \cdot \sigma_{tierra}^2}\right) - \left(\frac{-(x-\mu_{mar})^2}{2 \cdot \sigma_{mar}^2}\right)$$

Con lo que se llega a una expresión de segundo grado a resolver por los medio disponibles en el momento, en Matlab la resolución recomendable pasa por la orden solve (que dadas las ecuaciones del sistema, con las incógnitas en formato simbólico, 'sym', las resuelve), o bien roots (que, si la expresión es polinómica permite hallarle los ceros con mucha rapidez sin elementos simbólicos de por medio) o por aplicar la resolución tradicional de segundo grado.

$$x^2 \cdot \left(\sigma_{tierra}^2 - \sigma_{mar}^2\right) + x \cdot \left(2 \cdot \mu_{tierra} \cdot \sigma_{mar}^2 - 2 \cdot \mu_{mar} \cdot \sigma_{tierra}^2\right) + \left(\mu_{mar}^2 \cdot \sigma_{tierra}^2 - \mu_{tierra}^2 \cdot \sigma_{mar}^2\right) = 0$$

Figura 18. Resolución de intersección de distribuciones

Esta es la mejor opción encontrada para la automatización de un umbral. Con mencionar que la forma más cómoda para trabajar con probabilidades es convertir antes la propia imagen al rango [0, 1] damos por finalizadas las sugerencias a este punto. Aún con todo, el programa creado permite al usuario escoger a mano el umbral aunque la herramienta generada es de utilidad ante la duda.

4.2 Extracción de la línea

En el apartado anterior, al mostrar el proceso de IRS, se adelantó el proceso completo pero recordemos, lo que hasta ahora hemos obtenido es una imagen binarizada separando dos zonas de tierra y mar. Lo que buscamos ahora es una línea, una consecución de píxeles, que marque el cambio. Para ello nos es fácil el emplear un filtro morfológico. En primer lugar se ha programado un filtro de cierre por si hubiera pequeñas zonas mal clasificadas en la imagen. Una vez hecha esa pequeña limpieza la forma de obtener la línea sería tomando bien la zona de tierra o de mar, ampliándola y restando posteriormente. Por razones que se verán en adelante nos conviene una línea con posibilidades restringidas, se requiere que la línea solo pueda optar a las direcciones norte-sur, este-oeste o bien en diagonal como se muestra a continuación:

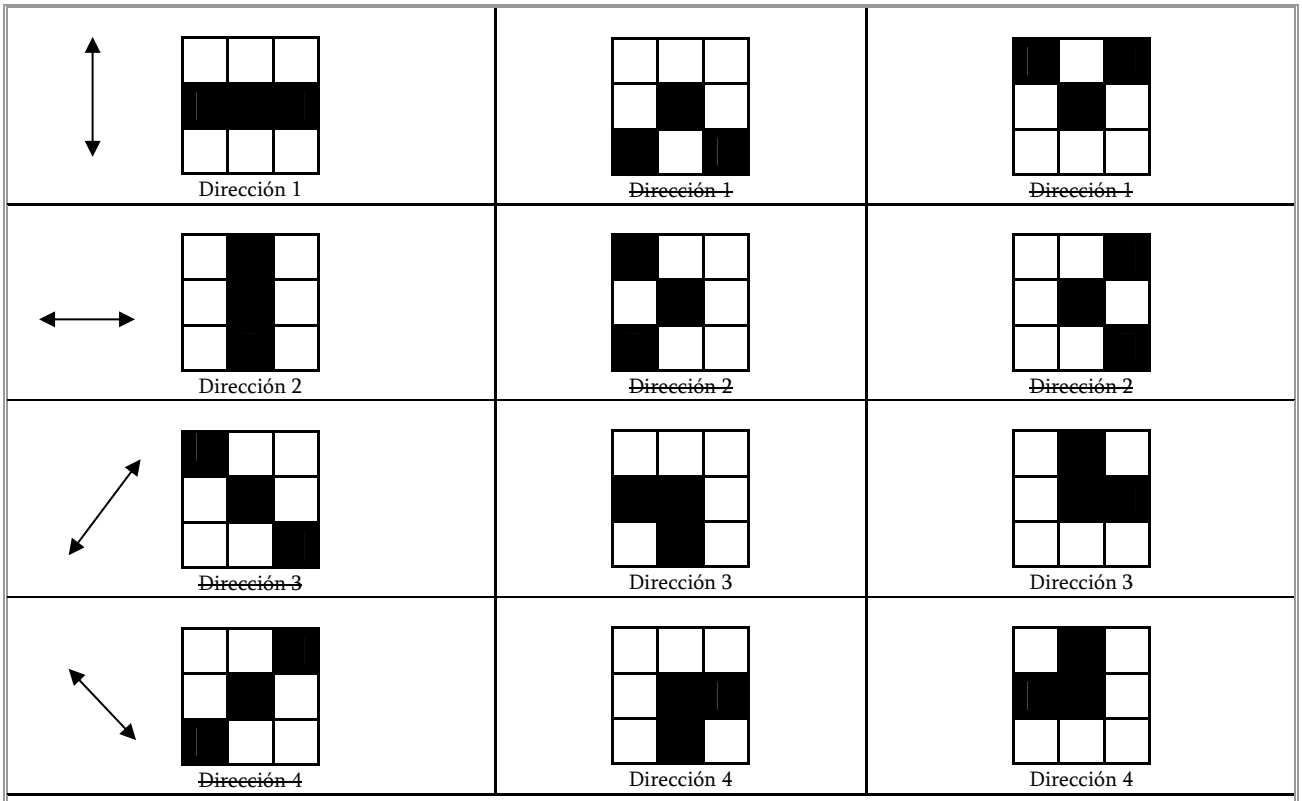
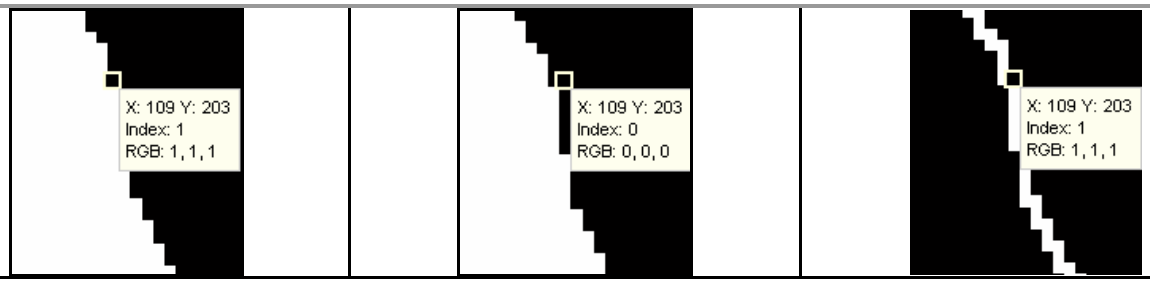


Figura 19. Diseño de las diferentes direcciones. Se tacha aquellas que hemos conseguido evitar en nuestra forma de generar la línea aproximada. La línea aproximada será una línea de píxeles consecutivos en contacto lado con lado.

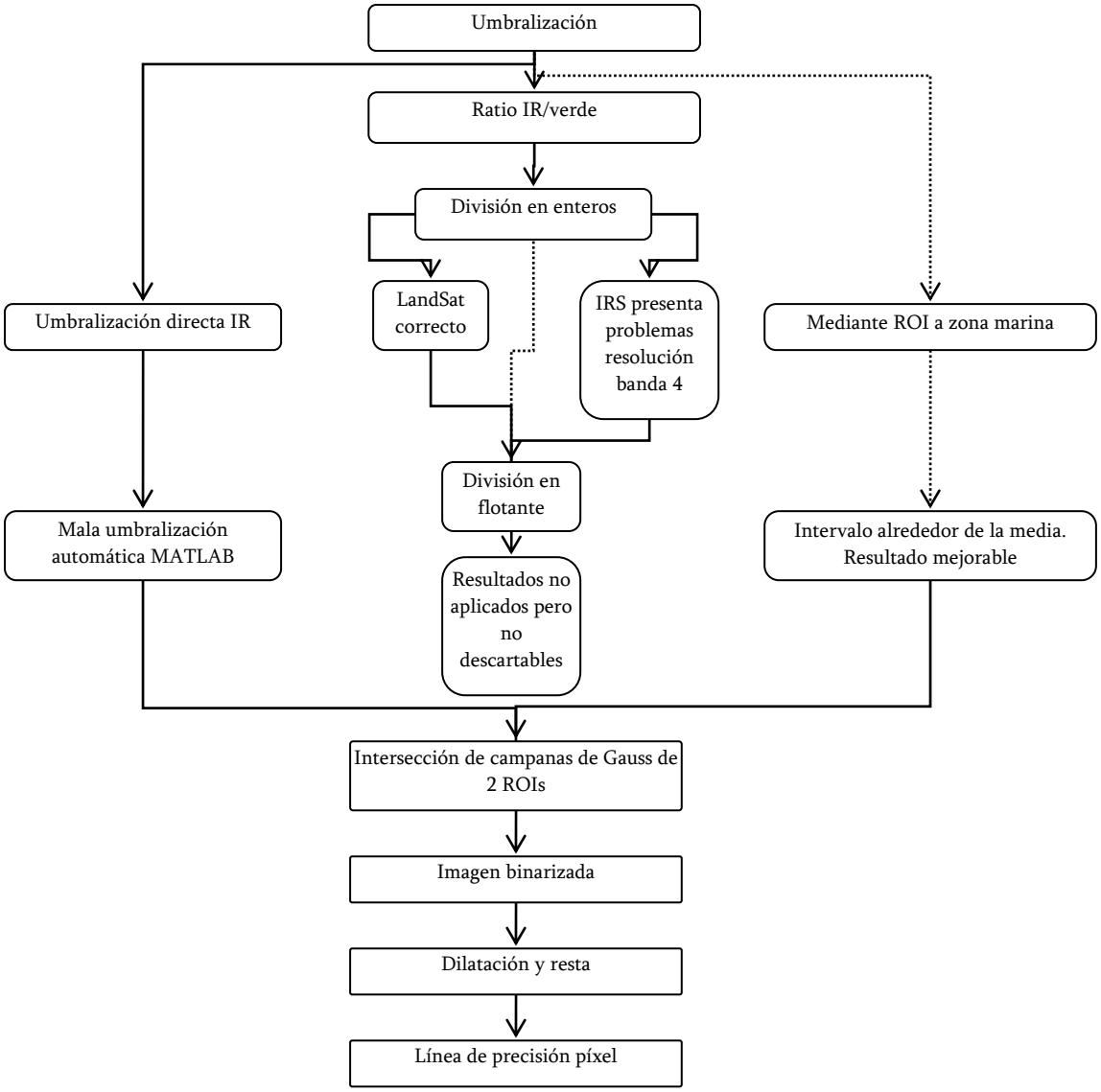
Ahora bien, el restringir estas direcciones nos condiciona la forma de obtener la línea aproximada. Se puede comprobar que, fuera como fuere, realizar una dilatación con un filtro cuadrado de 3x3 completo (llamado de '8 vecinos') genera que la diferencia posterior tenga un formato de línea continuo y con transición de píxel a píxel con un lado de contacto, esta operación evita configuraciones como aquellas que en la figura anterior están tachadas. Véase un detalle del proceso que acabamos de presentar (Figura 10):



Obsérvese que a la segunda imagen es la erosión de la primera, y la diferencia entre ambas resulta la línea aproximada, aquella que solo ha de tener posibilidades restringidas para poder hacerle perfiles.

Figura 20. Proceso completo de obtención de la línea de costa aproximada en IRS

Llegados a este punto se ha dado solución de varias formas y experimentando con varias opciones aportadas en diferentes artículos. Sería ya muy planteable enfrentar este apartado a las precisiones asociadas a los trabajos ya existentes. Añadiendo en nuestro caso un nivel de automatismo importante.



4.3 Ampliación: componentes principales

Cabe aclarar que la aplicación de componentes aquí descrita surge a posteriori de diversas experimentaciones con las imágenes de prueba definitivas de QuickBird. Aunque este apartado es una aclaración previa sobre otro tipo de imágenes con que se ha trabajado, sería igualmente válido leerlo tras la exposición del modelo superficial donde ya se está familiarizado con la forma de trabajo, los algoritmos y lo buscado. A la hora de realizar pruebas se disponía de tres imágenes en diferentes fechas. El problema surgió en una de ellas pues en el momento de la toma había temporal en la costa.

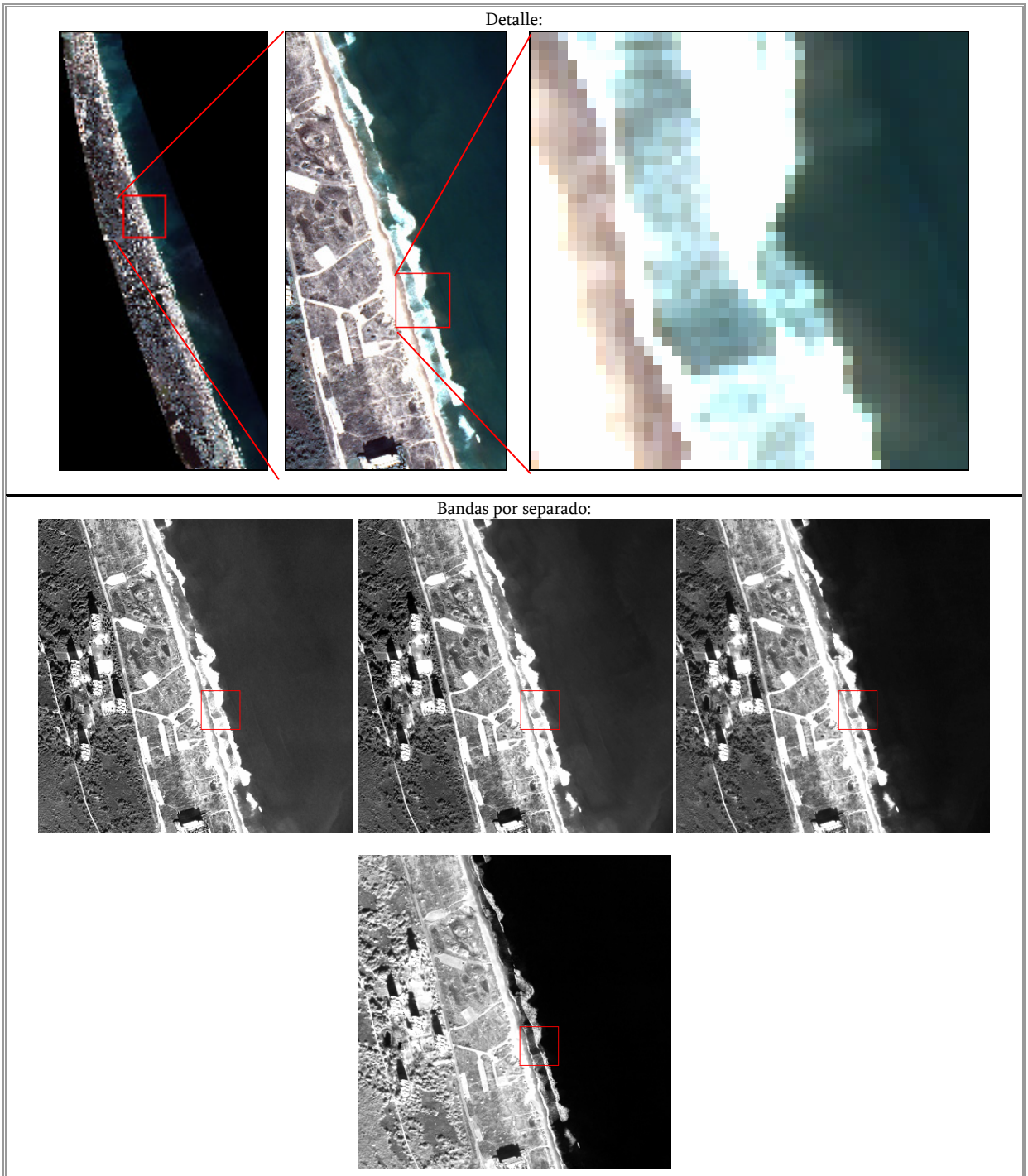


Figura 21. Imagen de enero de 2006. Visión de todas las bandas Peculiaridad: Se observa un temporal que complica la aplicación del algoritmo

El tener una imagen tan tormentosa se convierte en un problema para poder emplear nuestro algoritmo dado que la caída espectral tierra-mar se pierde, las zonas de oleaje y espuma hacen perder el sentido de nuestro proceso. Para no desechar una imagen que puede servir de campo de pruebas podríamos pensar si existe alguna banda en que el efecto del temporal sea mínimo, cosa que, visualizando las bandas por separado, queda descartado, *los problemas visuales generados por el temporal, se dan en todas las bandas*. Y es de la frase anterior que surge la siguiente idea, recordemos que las Componentes Principales de una imagen se definen como: "*conjunto de variables o componentes, obtenidas mediante combinación lineal de las bandas originales, de forma que los primeros nuevos componentes generados expliquen el máximo de la variabilidad total, mientras que el resto vaya explicando menor cantidad de varianza de forma sucesiva. Además, las sucesivas combinaciones lineales se extraen de forma que no exista correlación entre ellas*". Por tanto, cada componente irá explicando de forma sucesiva el mayor grado de información común a todas las bandas. Y, si la influencia del temporal *estropea* todas las bandas, ¿no cabe esperar que en alguna secundaria deje de existir ese efecto del temporal? Así surge la idea, véase el resultado:

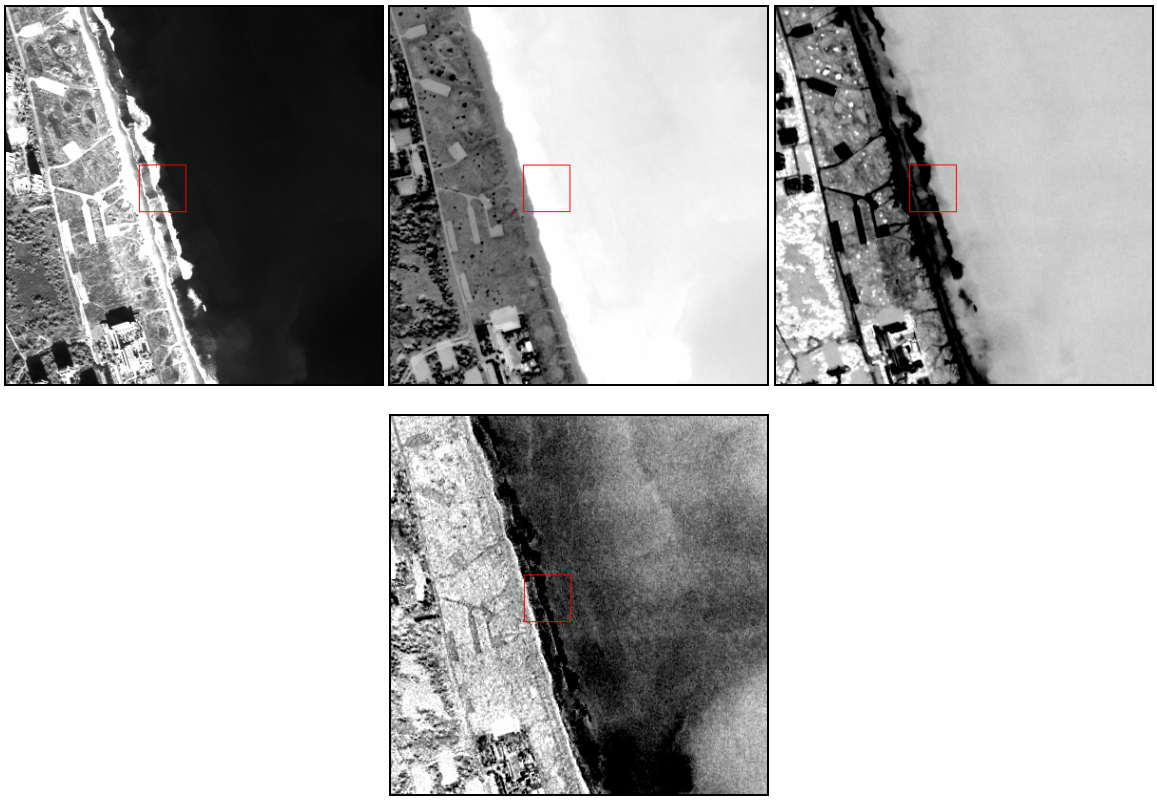


Figura 22. Componentes principales de enero de 2006

La última componente absorbe gran parte del ruido (como se esperaba), la primera absorbe la información común a todas las bandas, parece una banda normal (como se esperaba), pero he aquí que en la segunda componente obtenemos lo postulado, una diferenciación clara entre mar y tierra ¡¡donde la distorsión dada por el temporal ha desaparecido!!.

Como se observa, es una aportación muy interesante. Por supuesto, una vez se tiene este medio, debe testearse y así se presentará los resultados en el apartado correspondiente (con cifras muy interesantes en cuanto a precisión). No es necesario profundizar, por otro lado, en la algorítmica empleada para obtener la línea de costa dado que es análoga a lo descrito en el modelo superficial. Simplemente que, donde

antes teníamos una razón física por absorción de infrarrojos, ahora es una característica descubierta. Cabe, en vistas a futuro, interpretar qué es lo que sucede exactamente en la imagen para obtener ese resultado y el tipo de nueva aproximación a la costa que se pueda obtener.

Sin embargo, en nuestra misión de dudar de todos los procesos, observemos el efecto de la segunda componente principal para las imágenes en diversas fechas con que estamos trabajando y testeando:

Fecha	2ª CP propia de cada imagen	2ª CP con estadísticos fijos
Junio 2005		
Enero 2006		
Abril 2006		

Figura 23. Componentes principales de enero de 2006

Lo que observamos en la figura anterior (Figura 23) es: en la primera columna la segunda componente principal propia de cada imagen, y en la segunda columna, la segunda componente principal a través de estadísticos concretos. Para entender esto de forma más sencilla pensemos lo siguiente: el proceso de componentes principales consiste en tomar las bandas originales y proyectarlas en nuevos ejes, la peculiaridad es que para saber en qué ejes se proyecta se debe calcular los estadísticos de la imagen y extraer los autovectores. Por tanto, si cada imagen tiene una peculiaridad, tendrá una dirección diferente de cada autovector, y cada componente será peculiar también a cada imagen. Esto es lo presentado en la primera columna. Sin embargo, se observa que la

imagen de abril de 2006 tiene una capacidad muy clara para diferenciar tierra y mar. Lo que hacemos para crear la segunda columna es tomar los estadísticos de abril de 2006, es decir, sus autovectores, y los empleamos con las otras imágenes (obteniendo a favor de nuestro ansia por probarlo todo, mejor resultado). La labor se ha convertido en tomar las bandas originales y proyectar sobre ejes fijos que nos han venido dados por una imagen en concreto. ***Queda estudiar este apartado con algo más de profundidad pero no se puede descartar el haber descubierto de forma casual unos buenos ejes de proyección para nuestro fin, sistema tan válido como las proyecciones para los tasseled cap (basadas en proyecciones empíricas), aunque en este caso para nuestro propio fín.***

No obstante queda por mostrar un aspecto de las imágenes de antes. Comprobemos algún perfil a la línea de costa para mostrar con mayor veracidad el descubrimiento:

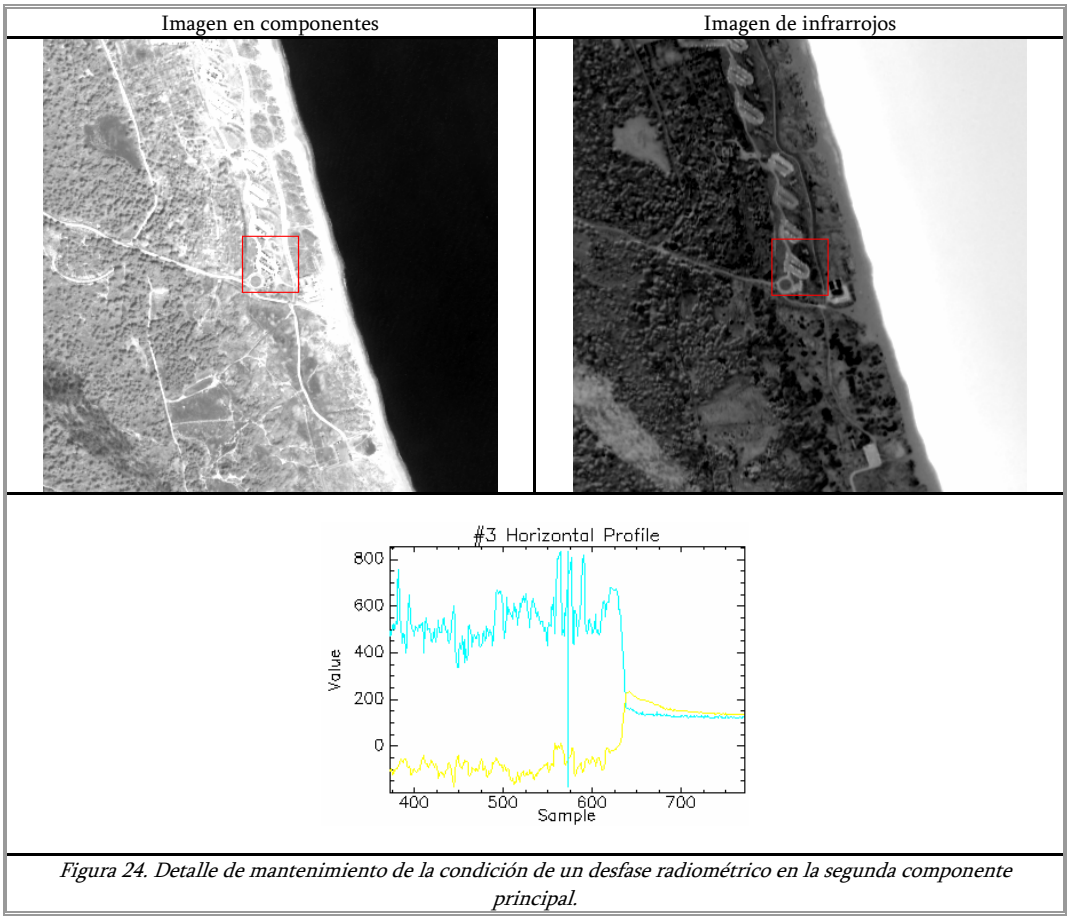


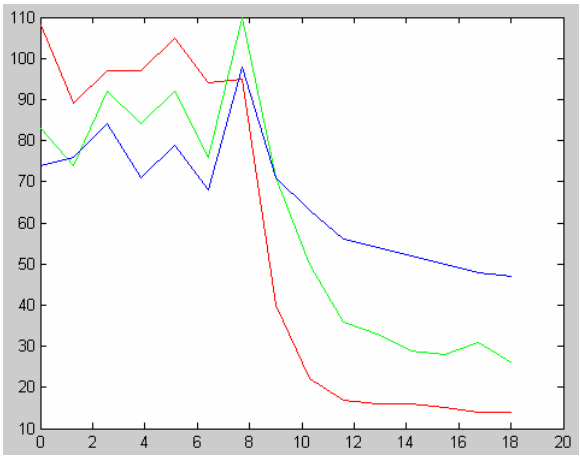
Figura 24. Detalle de mantenimiento de la condición de un desfase radiométrico en la segunda componente principal.

5 . MODELO DE PERFILES ESPECTRALES

5.1 Descripción del modelo

Llegados a la obtención de la línea de costa con la mayor precisión que la literatura actual permite, nos surge la idea de mejorar esa precisión. Y es la imagen siguiente (Figura 25) la que nos debe inspirar el procedimiento a emplear:

Imagen visualizada en (4,3,2)



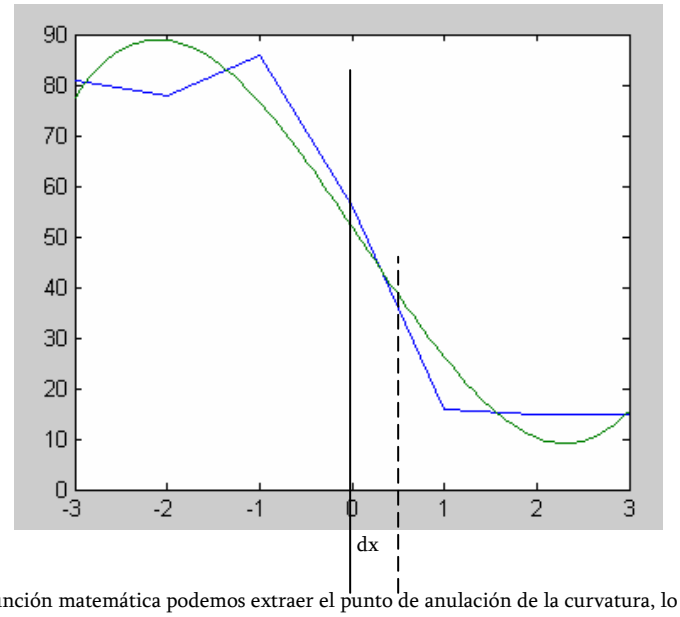
Perfil transversal

Figura 25. Ejemplo del perfil perpendicular a un punto sobre la costa

Si nos preguntamos con qué intensidad se sufre el salto entre mar y tierra realizamos inmediatamente este perfil. Vemos lo que ya esperábamos, una curva que separa las dos áreas que ya hemos umbralizado. En concreto, vemos dos zonas, una terrestre con sus irregularidades que de repente cae hacia el mar, y la llegada a la estabilidad marina teniendo que volver a tomar valores constantes. Habrá píxeles bajo los cuales no exista nada de agua, otros donde no haya nada de tierra y unos en medio bajo cuya huella en el terreno haya influencia de ambas superficies. ¿En qué punto, en qué píxel, cambia la influencia ejercida por el mar o la tierra? Podemos pensar que cuando la curva empieza a caer ha comenzado cierta influencia del mar y que cuando retoma la horizontalidad la tierra ha dejado de influir, ¿es posible saber en qué píxel la tendencia ha cambiado en pro de tierra o mar? Puede que visualmente sí llegáramos a señalar una zona aproximada, y si eso fuera una curva matemática buscaríamos el punto en que dejaría de '*estar girando hacia la derecha*' y comienza a '*girar a la izquierda*', es decir, donde infinitesimalmente hay un fragmento de línea recta, el radio es infinito, la curvatura (y por tanto, la segunda derivada de esa curva matemática) se anula.

Pero además, si conseguimos la expresión matemática que más se ajuste a la realidad podremos buscar una precisión que los píxeles originales por sí solos no pueden dar.

En la siguiente figura (Figura 26) se representa la idea. Se puede observar los valores discretos de un perfil espectral y el ajuste realizado con una función de 3er grado $\left(y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d\right)$. La razón de emplear una curva de tal grado es, aparte de que visualmente se ajusta bien, la facilidad para obtener el punto de inflexión.



De la función matemática podemos extraer el punto de anulación de la curvatura, lo que no es posible con los valores discretos directamente tomados de la imagen. Desde el píxel central se tiene un desplazamiento (dx) que indicará la posición correcta de la inflexión.

Figura 26. Idea visual del ajuste. Se representa lo que será la corrección del auténtico punto de inflexión respecto al centro del perfil.

Aquí se observa mejor lo que matemáticamente es el punto de cambio de curvatura. Si bien ésta es la idea intuitiva, tenemos que llevarla adelante con orden: ¿En qué dirección se realiza el perfil?, ¿qué píxeles entran a formar parte?, ¿cómo se encuentra la expresión matemática? Y una vez se tiene ¿qué se obtiene como resultado?

Recordemos que partimos de la línea aproximada y que, como se dijo, solo tiene unas posibilidades limitadas de dirección. Pudiendo solo tomar las direcciones norte-sur, este-oeste y diagonales, la perpendicular a cada punto de la línea también podrá tomar tan solo esas configuraciones. El diseño de la línea aproximada facilita las posibilidades más cómodas de perfiles. Cada punto de la línea pasa a ser el píxel central de un perfil (tomaría el valor de abscisa 0 del cuadro anterior, Figura 26), tomando los píxeles hacia tierra y mar desde él se genera el perfil.

Si observamos el perfil anterior, una vez conocidos los valores de abscisa (desde $-n$ hasta $+n$, siendo n una elección del usuario según la imagen o la zona) y sus valores de ordenadas (los niveles digitales) se tiene un sistema lineal resoluble por mínimos cuadrados:

$$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \Rightarrow ¿a,b,c,d?$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ x_n^3 & x_n^2 & x_n & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \cdot incog = K \\ incog = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot K \end{array} \quad (1)$$

Donde 'y' es el Nivel Digital y 'x' el valor de separación respecto al píxel central de referencia

Conocidos los valores de a, b, c, y d tenemos la expresión matemática que define ese perfil. Y he aquí la razón más atractiva de emplear un polinomio de este grado, la solución del punto de inflexión es directa.

A partir de:

$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$	(2)

Se obtiene la segunda derivada:

$y' = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$ $y'' = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$	(3)

De donde se obtiene de forma directa la expresión para tener el punto de inflexión:

$y'' = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b = 0$ $x = \frac{-2 \cdot b}{6 \cdot a}$	(4)

Este valor de x es un valor que puede tomar valores tanto positivos como negativos, indica el valor de desplazamiento desde el píxel central hasta el punto de inflexión, el *dx* del cuadro anterior (Figura 26). Por tanto el resultado es una nueva posición, si el perfil es horizontal se sumará *dx* a la *x* del píxel central en la imagen, análogamente con *y* si el perfil es vertical. Cabe llevar cuidado al sumar ese desplazamiento en diagonal puesto que una separación de ± 1 en el perfil implica $\pm 1 \cdot \sqrt{2}$ píxeles en distancia:

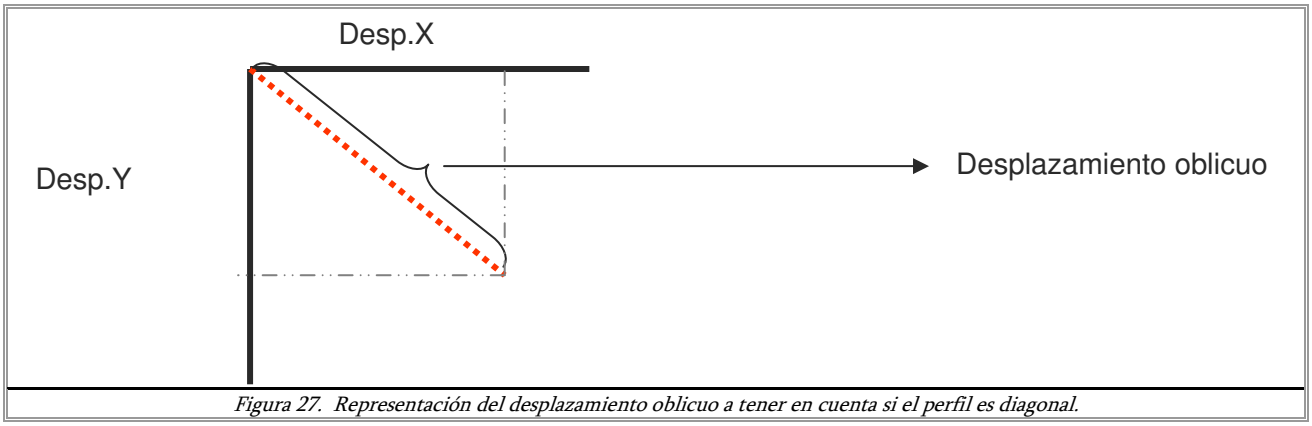


Figura 27. Representación del desplazamiento oblicuo a tener en cuenta si el perfil es diagonal.

Posteriormente la transformación a coordenadas terreno baste escalar y trasladar las nuevas coordenadas dado que las coordenadas de la esquina de la imagen son conocidas por estar georreferenciada.

Hemos hecho una aproximación a la línea, ajuste matemático y resolución para aprovechar la información de los píxeles y extraer más información que la esperada a priori.

5.2 Resultados modelo de perfiles

Esta teoría descrita llevó a los primeros resultados que, cuando menos, no son descabellados. Tanto para LandSat como para IRS se obtuvieron resultados correctos, pero mejorables (Figura 28).

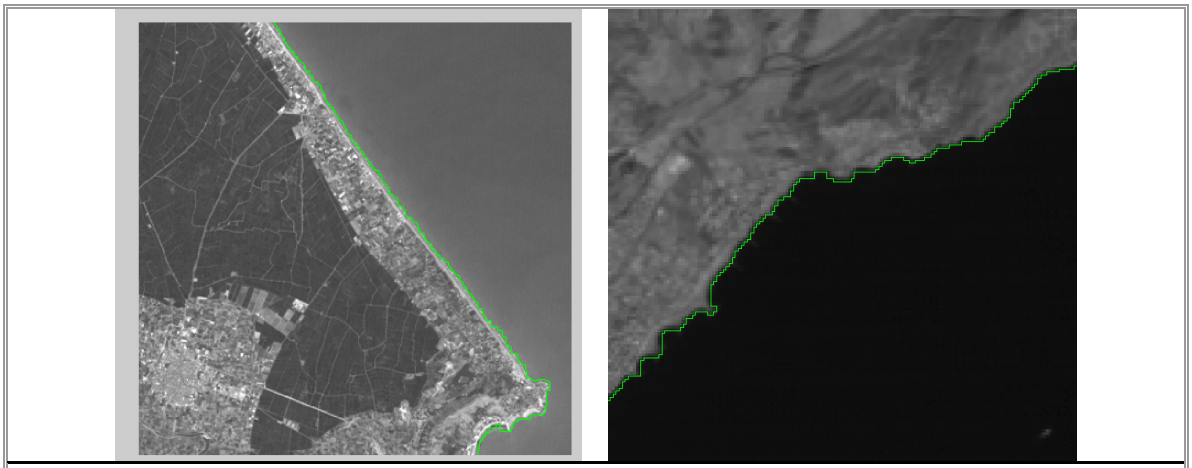


Figura 28. Resultado visual de la línea de costa obtenida para estos fragmentos de LandSat e IRS

A continuación (Figura 29) se muestra algún detalle más. En la fila superior se observa que la línea azul aproxima mejor la tendencia que trazaríamos si tuviéramos que dibujar a mano. Cabe pensar en los cruces sufridos en la imagen inferior izquierda, los fallos en la imagen inferior central y el pico de la superior central.

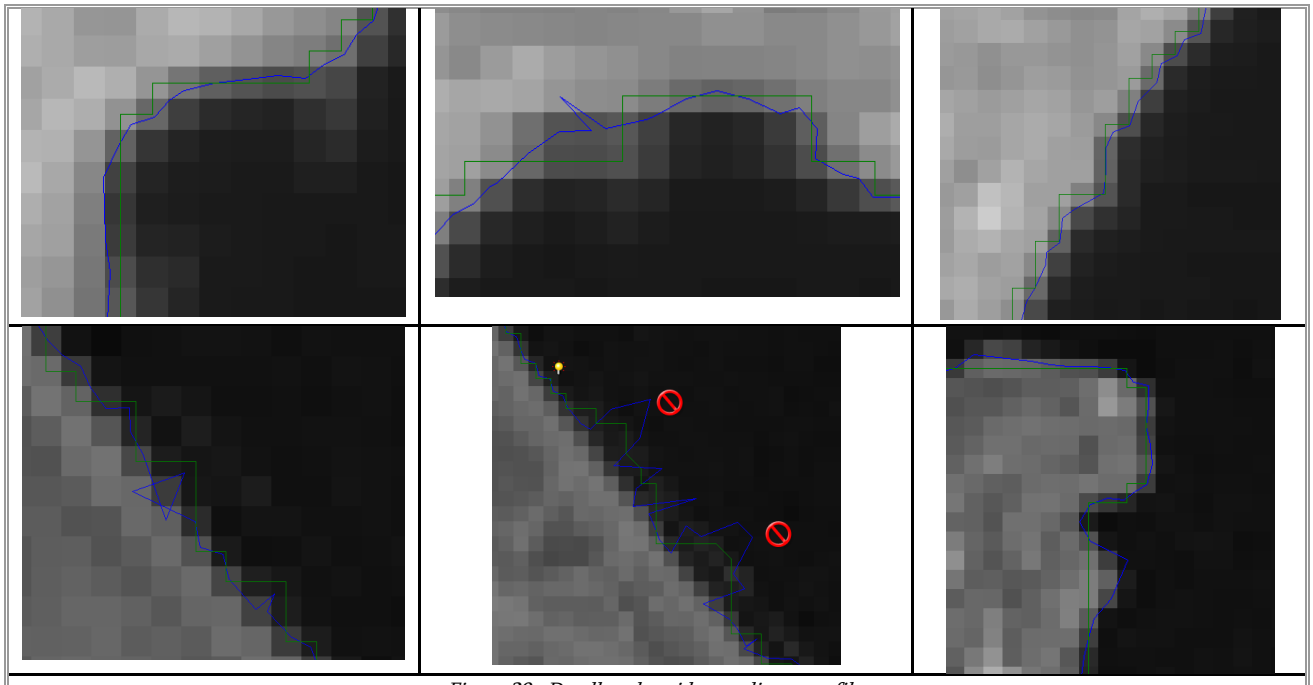
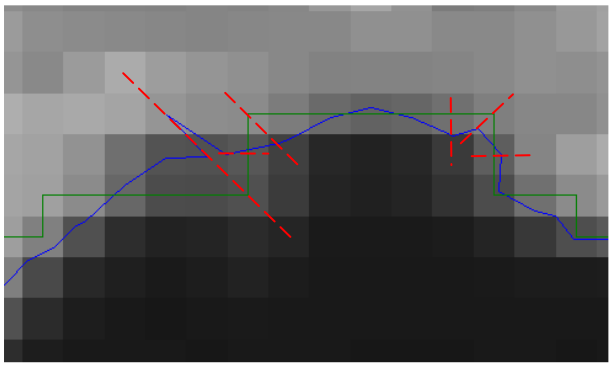


Figura 29. Detalles obtenidos mediante perfiles

¿Es correcto o incorrecto el resultado? Según lo estudiado podemos responder lo siguiente. Tomemos la imagen central superior y tracemos con líneas aquellos perfiles que el algoritmo habrá tomado (Figura 30). Los perfiles son correctos, el nuevo punto que aporta cada píxel original está en la alineación correcta. Podemos observar que la bahía central se ha resuelto correctamente; dibuja una tendencia más redondeada y

natural de ella. A la derecha no se obtiene nada ilógico pero no es una línea tan suavizada, cada perfil es independiente de la tendencia zonal, exageración de lo cual es el error del pico en la curva. La independencia de cada perfil respecto al de los vecinos genera, por un lado curvas poco concordantes con el vecindario y, en casos particulares, errores como el visto.



Se observa el detalle quebradizo de la línea aún cuando la matemática con la que se ha resuelto cada perfil sea correcta. Aunque la línea se aproxima, cabe pensar que debería tener en cuenta de algún modo el vecindario.

Figura 30. Idea visual del ajuste

Cabe preguntarnos si existe alguna forma de que si un perfil no puede dar un resultado adecuado se le pueda implicar en un vecindario mayor para que la tendencia de la zona ayude a definir más la línea de costa de forma más realista.

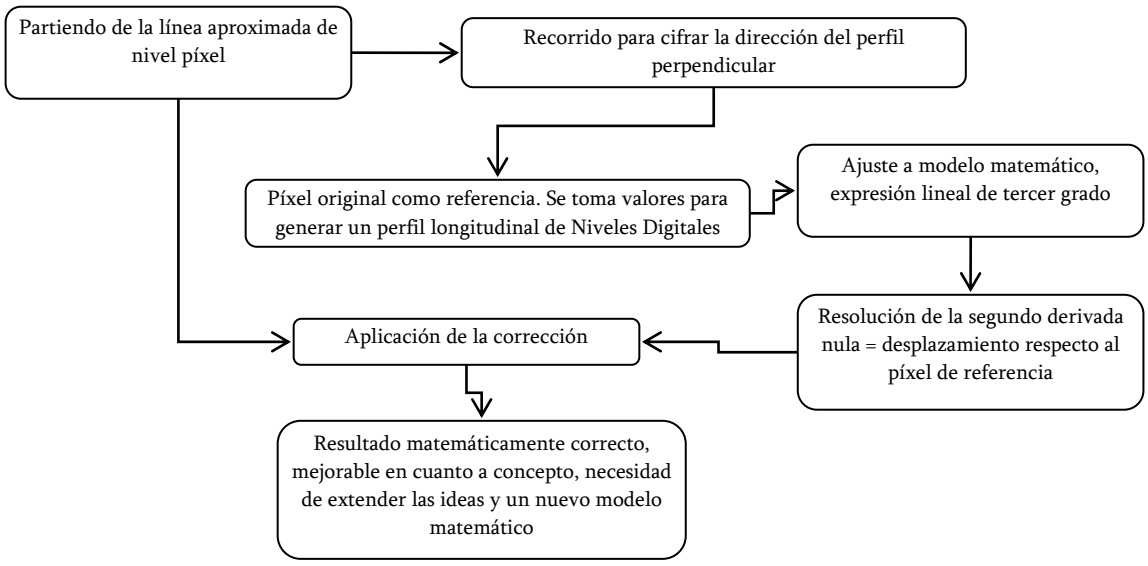
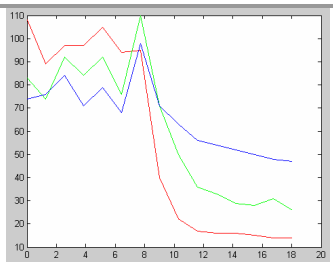


Figura 31. Esquema de procedimiento trabajando con el modelo de perfiles

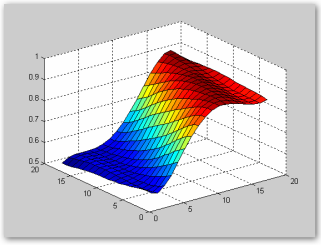
6 . MODELO SUPERFICIAL

Al que también nos podemos referir como ***modelo tridimensional*** o ***modelo 3D*** por la visión espacial de la que hay que servirse para plasmarlo. Esta idea en sí viene a dar solución a los problemas surgidos en el método anterior. Comencemos por la idea visual. Partiendo de la misma línea aproximada, donde se tomaba perfiles ahora tomaremos un vecindario:

Imagen visualizada en (4,3,2)



Perfil transversal



Modelo 3D del vecindario

Figura 32. Ampliación de la idea de área de estudio. Se contrapone el efecto visual de tomar solo un perfil a tomar todo un vecindario

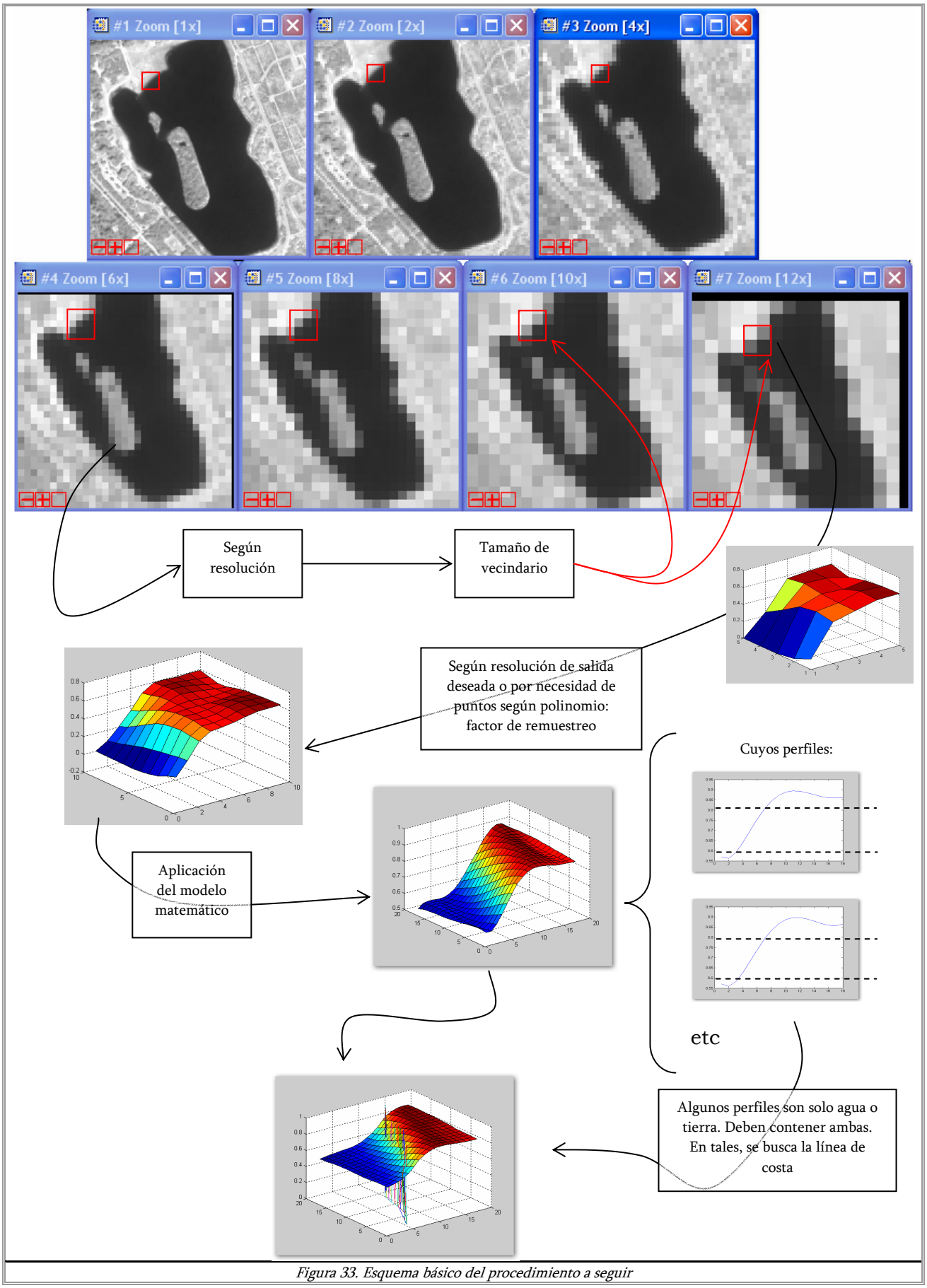


Figura 33. Esquema básico del procedimiento a seguir

El cuadro anterior (Figura 33), nos ha de servir como introducción del método a seguir. El objetivo de ese cuadro es no perder una vía general dado que en cada paso se han llevado a cabo ciertas divagaciones y comprobaciones que bien pueden hacernos perder el hilo y la razón de cada cálculo y cada peldaño. Igual que en el método anterior, ahora querremos dar respuesta a otras preguntas: ¿Qué vecindario alrededor del píxel principal se debe tomar? ¿Cuál es el modelo matemático ahora y su interpretación intuitiva? ¿Cuál va a ser la solución matemática y cómo va a tener su salida para ser práctica?

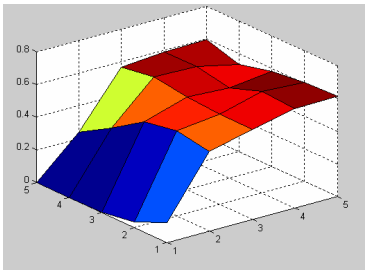
No perdamos de vista el esquema anterior. En primer lugar, llegados a este punto, desearemos verificar que obtenemos precisiones subpíxel, para ello podemos tomar un sensor QuickBird y degradarlo a varias resoluciones menores; se pretende simular sensores de menor resolución, Así sabremos cual es la posición correcta de la línea de costa y si, con nuestro modelo, la conseguimos aproximar. La consecuencia de tener varias resoluciones es que el ***vecindario*** que alcance mar y tierra a la vez, para detectar su interfaz, va a ser mayor en imágenes de mejor resolución; todo ello es un primer factor que afectará al vecindario a escoger (al final del proyecto deberemos tener claro que también otros factores nos afectarán).

Una vez tomado ese vecindario se decide remuestrearlo a una resolución mayor. Un ***remuestreo*** no recupera información que se haya perdido durante el degradado, del mismo modo que si remuestreamos una imagen LandSat no recuperaremos información que un sensor tan grande no sea capaz de tomar. Un remuestreo es una herramienta visual por la que se genera una imagen de mayor resolución, heredando, con diferentes algoritmos, la misma información de la original. ¿Para qué nos puede interesar esta herramienta?, sin adelantar demasiado pensemos que va a existir una fórmula, un polinomio de dos variables *f(x,y)* que habrá de ajustar ese vecindario real, ahora bien, si tomamos un vecindario de 3x3 tendremos 9 ecuaciones y, si nuestro polinomio tiene más incógnitas no se puede resolver el sistema de ecuaciones. Tomando ese vecindario 3x3 y remuestreándolo podemos generar más ecuaciones con información heredada de esos 3x3 pudiendo llegar a generar el sistema de ecuaciones y resolver la expresión *f(x,y)* que nos interesa. Más adelante se verá que el remuestreo también tiene para nosotros una utilidad muy importante.

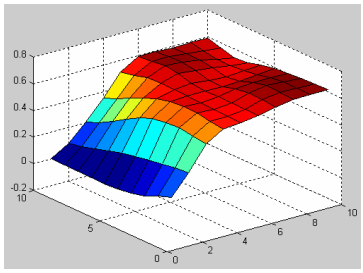
Habrá con ello un ***terreno matemático*** (que así llamaremos a *f(x,y)*)del que explotaremos la nueva proposición matemática con que extraer la línea de costa abarcada por ese vecindario en forma de puntos. En esta ocasión tendremos más puntos de salida que de entrada, con lo cual, además de que cada punto tenga consigo mejor precisión subpíxel (y más probable, por la aportación zonal) se podrá tener más definición en la propia línea.

6.1 Obtención del terreno matemático

Como decíamos, para cada punto se toma un vecindario. La representación zonal vista anteriormente se realiza posicionando x e y en retícula plana y dando como elevación, el nivel digital del vecino oportuno. Es así como podemos imaginarnos el terreno real de partida. Lo que vamos a hacer es crear un terreno matemático, es decir, una expresión que para cada x e y nos asocie una elevación. ¿Qué ventaja tiene esto?



Terreno original



El terreno matemático aporta información donde no la existía de forma directa

Figura 34. Terreno real y su consecuente terreno matemático tras el remuestreo

La respuesta la podemos intuir de la figura anterior (Figura 34). Un terreno original solo tendrá valores para cada píxel tomado, si bien es cierto que podemos remuestrear hasta el infinito, no tiene mucho sentido tanto por influencia en la información como por coste de cálculo, pero si tenemos una expresión matemática se podrá obtener un valor de elevación (Nivel Digital) incluso para valores decimales entre los píxeles.

En principio no existe ni mejor ni peor opción para el polinomio que deberá modelizar la realidad pero habremos de ser medianamente exigentes. Puede darse el caso de encontrar mejores opciones de polinomio según el terreno o la resolución de la imagen, el grado del polinomio siempre estará asociado a unas características geométricas (ver anejo: pg 73 Análisis de los polinomios) y cuestiones numéricas para calcularlo.

Por la capacidad de descripción optamos por un polinomio de 5º grado en ambas variables:

$$f(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + \\ + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3 + a_{17} \cdot x^4 + \\ + a_{18} \cdot y^4 + a_{19} \cdot x^4 \cdot y + a_{20} \cdot x^4 \cdot y^2 + a_{21} \cdot x^4 \cdot y^3 + a_{22} \cdot x^4 \cdot y^4 + a_{23} \cdot x^3 \cdot y^4 + a_{24} \cdot x^2 \cdot y^4 + \\ + a_{25} \cdot x \cdot y^4 + a_{26} \cdot x^5 + a_{27} \cdot y^5 + a_{28} \cdot x \cdot y^5 + a_{29} \cdot x^2 \cdot y^5 + a_{30} \cdot x^3 \cdot y^5 + a_{31} \cdot x^4 \cdot y^5 + \\ + a_{32} \cdot x^5 \cdot y^5 + a_{33} \cdot x^5 \cdot y^4 + a_{34} \cdot x^5 \cdot y^3 + a_{35} \cdot x^5 \cdot y^2 + a_{36} \cdot x^5 \cdot y \qquad (5)$$

El medio para encontrar los a_i es directo por mínimos cuadrados:

$$z = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + \ldots + a_{36} \cdot x^5 \cdot y \Rightarrow ¿a_i?$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 \cdot y_1 & \cdots & x_1^5 \cdot y_1^2 & x_1^5 \cdot y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 \cdot y_2 & \cdots & x_2^5 \cdot y_2^2 & x_2^5 \cdot y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n \cdot y_n & \cdots & x_n^5 \cdot y_n^2 & x_n^5 \cdot y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{35} \\ a_{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} A \cdot incog = K \\ incog = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot K \end{matrix} \qquad (6)$$

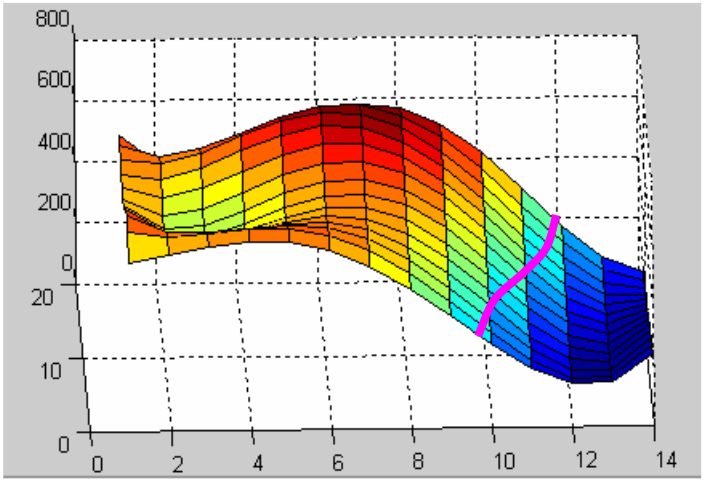
Donde 'z' es el Nivel Digital mientras 'x' e 'y' las coordenadas planas del vecindario tomado

Reflexionemos brevemente sobre esto. Cada píxel del terreno original genera una ecuación. Por experimentaciones (ver anejo: pg 74 Estudio analítico de los polinomio) se decidió emplear un polinomio de estas características, con el aliciente de requerir para

resolverse un mínimo de 36 ecuaciones (mismo número de coeficientes a resolver), lo cual implica un vecindario de 6x6. En una imagen de 2.4 metros de resolución no es problema dado que la transición tierra-mar suele venir dada con claridad en un vecindario de 15x15, pero en imágenes de menor resolución (19.2, 24.0, 28.8, ...) en apenas 3 píxeles es posible tener suficiente zona abarcada. En este punto ***se debe escoger si se amplia el vecindario o si se remuestrea el escogido para poder tener el mínimo de 36 ecuaciones requerido***.

6.2 Hipótesis de ubicación de la línea de costa

Del mismo modo que en perfiles espectrales teníamos una hipótesis interpretativa que unía la matemática y la capacidad de ubicar con ella el lugar en que se encontraba la línea de costa, deberemos hacer lo mismo. Recordemos que nuestra hipótesis intuitiva es detectar dónde la influencia del mar y de la tierra provoca un cambio en la dirección de la curva espectral.



A lo largo de la línea rosa veríamos el cambio de comportamiento tierra-mar. Se vuelve a cumplir que es el conjunto de puntos donde no existe curvatura en ninguna dirección, se trata de puntos circundados por un plano infinitesimal

Figura 35. Interpretación de la ubicación de la línea de costa 3D

Si observamos la figura y la línea por la que trazaríamos nuestra idea, cada perfil sigue conteniendo la hipótesis de anular la curvatura en esa línea, pero con la peculiaridad de que ahora se anula en todas direcciones, o por lo pronto en las dos direcciones principales. Tenemos la ventaja de que matemáticamente esta propiedad sigue respondiendo a una función: el laplaciano del terreno matemático. Donde anteriormente derivábamos dos veces respecto a una sola variable, el laplaciano se define como:

$$f(x,y) \rightarrow \nabla f(x,y) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) \qquad (7)$$

Podemos seguir interpretando que en verdad a cada par de coordenadas (*x, y*) el laplaciano nos aporta la suma de las curvaturas de la función original en sus direcciones principales en tal punto. Y, si intuitivamente estamos interpretando correctamente, lo que necesitamos es un sitio dónde deje de existir curvatura en cualquier dirección, que la tendencia de mar y tierra estén equilibradas. Lo cual lleva a que los puntos de la línea que buscamos cumplirán que ese laplaciano sea nulo:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= 0 \\ f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) &= 0\end{aligned} \qquad (8)$$

Intuitiva y matemáticamente sabemos la labor a realizar. Si reorganizamos el polinomio original será fácil de calcular esas segundas derivadas (la función *diff(vector,variable)* permite derivar cada elemento de un vector respecto una variable en matlab)

$$f(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + \cdots + a_{35} \cdot x^5 \cdot y^2 + a_{36} \cdot x^5 \cdot y =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & y & x \cdot y & \cdots & x^5 \cdot y^2 & x^5 \cdot y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{35} \\ a_{36} \end{pmatrix}$$

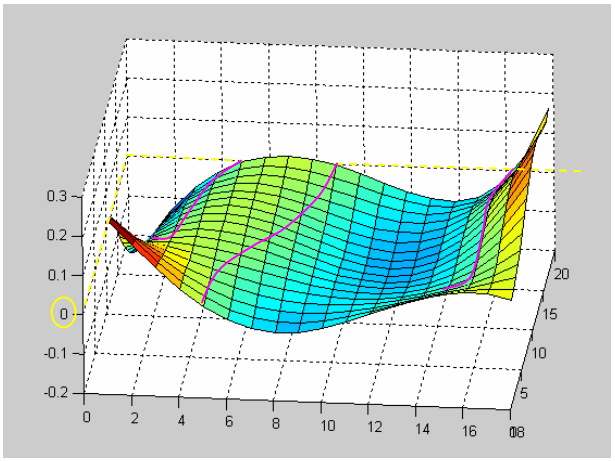
Lo que permite llegar con facilidad a las segundas derivadas de l polinomio derivando los términos del vector:

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 20 \cdot x^3 \cdot y^2 & 20 \cdot x^3 \cdot y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{35} \\ a_{36} \end{pmatrix} \\ f_{yy} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{35} \\ a_{36} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \nabla f = f_{xx} + f_{yy} \qquad (9)$$

Por tanto, para cada vecindario, obtenemos su terreno matemático, y a partir de éste podemos extraer una función de curvaturas. Luego, si fuera posible despejar *x* o *y*, tendríamos una función *y=f(x)* o *x=f(y)* que nos definiría matemáticamente esa línea rosa que dibujábamos arriba, pues para cada *x* o *y* tendríamos su recíproco. Ahora bien, no podemos realizar ese paso de función implícita a explícita, lo cual complica las cosas a nivel práctico. Dicho de otro modo, ***aunque tenemos la hipótesis matemática elaborada y resuelta, tenemos problemas para extraer esa información a un formato utilizable y con posibilidad de ser dibujada.***

Pero, además, aunque la idea sea entendible y empleable, tenemos un problema añadido. No solo los puntos pertenecientes a la línea de interfaz anularán el laplaciano. Dado que el polinomio que empleamos es de 5º grado por variable, en cada dirección

puede realizar 4 curvaturas, y por tanto incluso 3 cambios de curvatura. Visualmente puede quedar más claro (Figura 36).



Laplaciano Terreno matemático

Figura 36. Correspondencia terreno-laplaciano, línea de nulidad de laplaciano

La intersección del plano de valor 0 en el laplaciano es la solución que hemos decidido anteriormente. Así, en morado, se muestra las consecuentes líneas en el terreno. Se observa que nuestra condición geométrica incluye la línea de costa buscada pero no es el único conjunto de puntos que la cumplen (notar que, en tanto que la función es lineal, las líneas-solución son también continuas). ***Al problema de extraer una solución útil encontramos ya otro problema de solución múltiple a solventar.***

6.3 Resolución práctica de la línea a extraer

Cabe dar solución a los dos problemas anteriores. Ninguna opción puede ser nunca descartable, y de hecho es un campo para futuro. En el presente caso vamos a buscar la solución dando soluciones discretas; es decir, de una función matemática continua y abstracta vamos a buscar una colección de puntos discretos (pares *(x, y)*) que cumplan todas las condiciones que impongamos. Para ello buscaremos en cada perfil del vecindario escogido un solo punto a recuperar.

Ideemos pues lo siguiente: dado que tenemos el terreno matemático, lo representamos con la misma retícula que el terreno original.

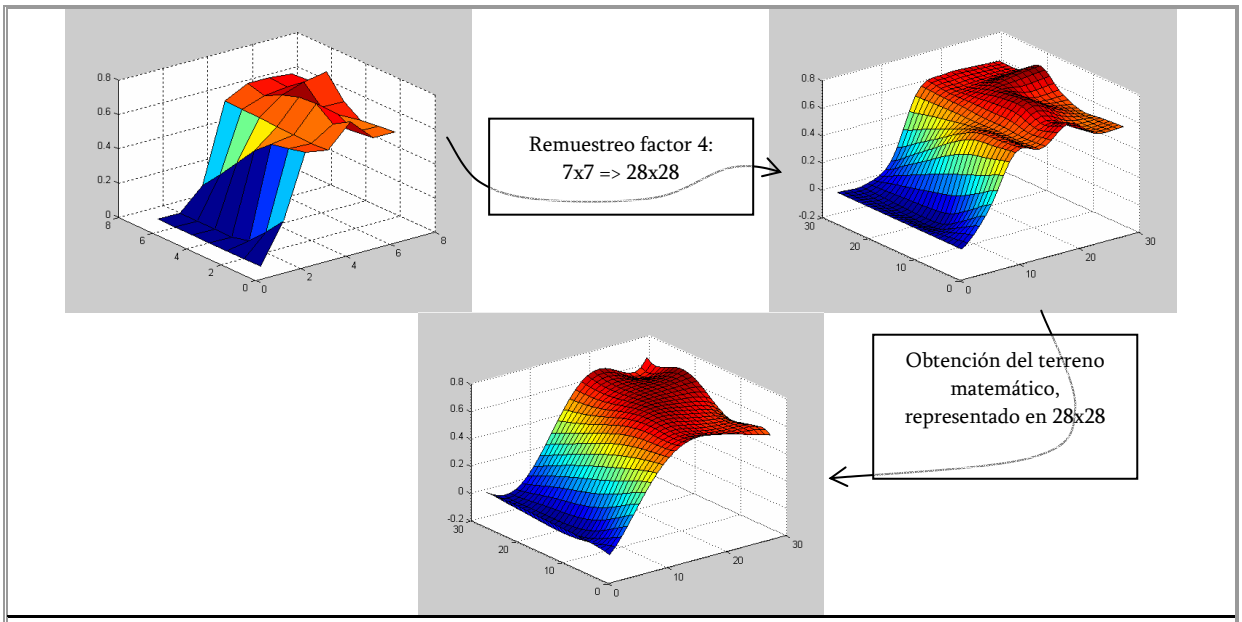


Figura 37. Analogía: terreno original, terreno remuestreado y una representación del terreno matemático

El proceso ideado es recorrer cada uno de esos 28 perfiles en *'x'* e *'y'* para tomar el punto adecuado, pero encontramos que no todos los perfiles son aptos para buscar un punto de línea de costa, y que aquellos que son candidatos, darán más de una solución:

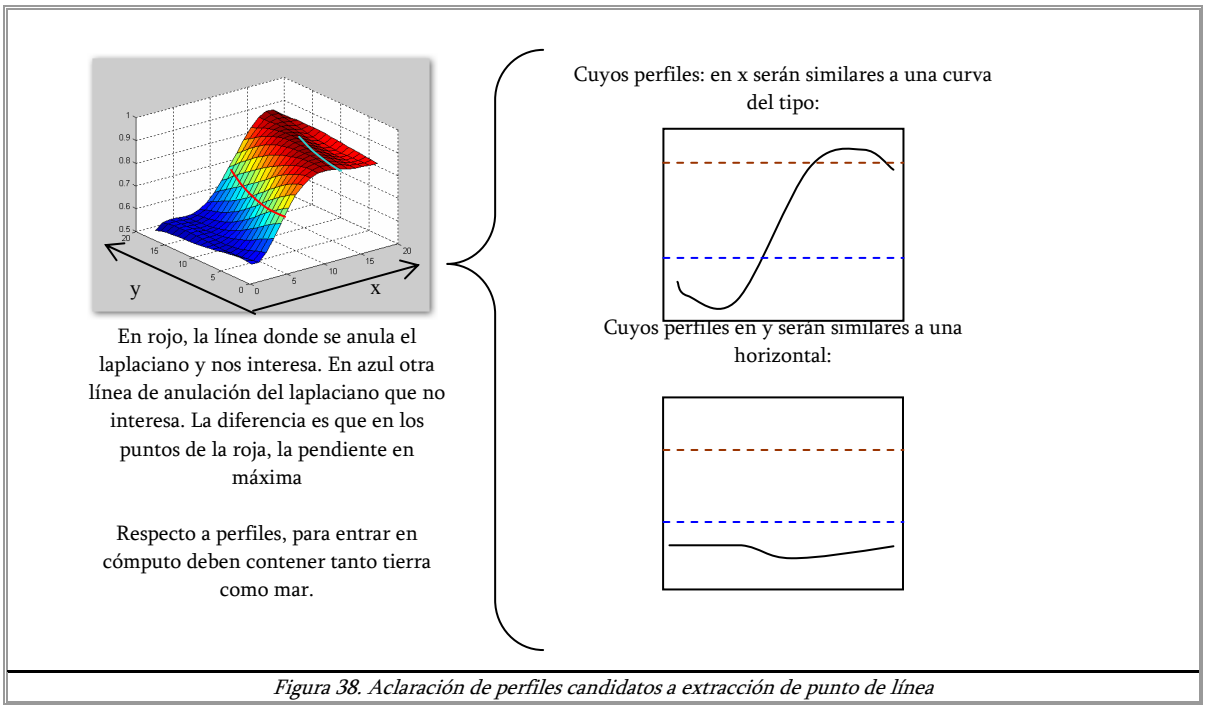


Figura 38. Aclaración de perfiles candidatos a extracción de punto de línea

En la figura se observa que podemos tener dos tipos de perfiles, unos que cruzarán la línea de costa y otros que no; aquí podemos ingeniar un criterio dado por dos umbrales, uno de tierra y otro de mar. Cuando se tiene el vecindario *matemático,* se pre-recorren todos los perfiles, y solo buscaremos la costa en aquellos en que exista **'valores mayores que un umbral de tierra'** y **'valores menores que un umbral de mar'**; es decir, que el perfil trascurra de verdad entre ambas zonas. De la Figura 38, los perfiles del primer modelo serían tomados para ser procesados, y los otros, descartados. De esta forma solventamos los perfiles de interés, pero además, hemos generado el criterio por el que extraeremos puntos de la costa. ***Cada perfil del vecindario, que haya sido aceptado, aportará un punto a la línea de costa (un solo par de coordenadas [x,y]***

perteneciente a la línea matemática requerida) y, dado que el número de perfiles depende del remuestreo, éste se convierte en criterio de resolución o densidad de puntos de la línea resultante.

El siguiente paso es extraer ese punto buscado en cada perfil. Y matemáticamente se convierte en una sola restricción, dado que en cada perfil se mantendrá constante *'x'* o *'y'*:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x,y)=0\\ x \Rightarrow cte\end{array}\right\}\nabla f(y)=0 \qquad (10)$$

Con la restricción escrita, se obtiene un polinomio de grado 5 solo dependiente de una variable que es la expresión matemática que dibuja el perfil oportuno. En este punto se puede realizar algunas pruebas de resolución automática (*solve, eval*) de matlab con una considerable carga en el cálculo. Pero el trabajo por polinomios sigue siendo más cómodo de modo que el *perfil del laplaciano* se obtiene tras reagrupar términos a mano:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x,y)=0\\ x \Rightarrow cte\end{array}\right\}\nabla f(y)=(\cdots)_5\cdot y^5+(\cdots)_4\cdot y^4+(\cdots)_3\cdot y^3+(\cdots)_2\cdot y^2+(\cdots)_1\cdot y^1+(\cdots)_0$$

Todo aquello que queda entre paréntesis es en verdad conocido pues la x viene dada por el perfil. Ello lleva a una representación más cómoda del polinomio:

$$\left((\cdots)_5 \quad (\cdots)_4 \quad (\cdots)_3 \quad (\cdots)_2 \quad (\cdots)_1 \quad (\cdots)_0\right)\cdot\begin{pmatrix}y^5\\ y^4\\ y^3\\ y^2\\ y^1\\ 1\end{pmatrix}=0 \qquad (11)$$

Cuya solución son las raíces del polinomio, resolubles con rapidez entrando el vector horizontal en la orden 'roots' de matlab, con un consiguiente ahorro de tiempo

Reagrupar términos a mano permite conseguir un polinomio solo dependiente de una variable y como se observa, al igualar a 0, la solución para cumplir con el laplaciano nulo en determinado perfil se reduce a calcular las raíces de un polinomio de una variable.

Al menos hemos llegado a una solución matemática, ahora bien, no es definitiva dado que un polinomio tiene tantas raíces como grado, así que nuestra curva del laplaciano cortará con el 0 hasta 5 veces. Deberemos extraer la solución correcta. En verdad se puede considerar que hemos salido del modelo matemático dado que ahora estaremos trabajando con puntos concretos *(x,y)*:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x,y)=0\\ x \Rightarrow cte\end{array}\right\}\nabla f(y)=(\cdots)_5\cdot y^5+(\cdots)_4\cdot y^4+(\cdots)_3\cdot y^3+(\cdots)_2\cdot y^2+(\cdots)_1\cdot y^1+(\cdots)_0$$

$$raíces=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5\end{bmatrix} \qquad (12)$$

Luego las 5 soluciones en ese perfil son 5 pares de coordenadas:

$$\begin{bmatrix}(x,y_1) & (x,y_2) & (x,y_3) & (x,y_4) & (x,y_5)\end{bmatrix}$$

Como es lógico, el caso análogo surge en condiciones oportunas para cada 'y'

Como se ha ido viendo, más de una línea cumple con la condición de anular el laplaciano (líneas roja y azul de la Figura 38, y fuera del rango del vecindario habría más), su intersección con el perfil que estemos procesando genera esos 5 puntos. Para escoger cuál de esos puntos nos habremos de quedar podemos idear gran variedad de criterios, en este caso:

-*Solo los puntos que entren en el vecindario serán aptos.* Tengamos en cuenta que al ser puntos resultantes de un proceso matemático esta precaución no está implícita a la hora de resolver las raíces del polinomio.

-*Aquellos puntos que contengan una parte imaginaria mayor de cierto umbral no despreciable, NO serán aptos.* Nuevamente, como consecuencia de la matemática no es raro encontrar soluciones tales que *y* sea un número complejo, sin embargo por cuestiones numéricas internas de matlab algunas buenas soluciones vienen acompañadas de infinitésimas partes irreales.

En este punto tendremos como candidatos aquellos '*y*' ('*x*' en un proceso análogo de los perfiles perpendiculares) que representan las líneas de vecindario que hasta ahora hemos dibujado. La condición definitiva para escoger el punto se basa en la primordial de nuestras condiciones, el tremendo cambio de respuesta entre mar y tierra y que genera que *la pendiente del punto correcto será máxima.* ¿Cómo calcular esa pendiente? Nos apoyamos brevemente en las matemáticas, dado el terreno matemático, el gradiente es una expresión vectorial $\left(\Delta f(x,y) = \left[f_x(x,y), f_y(x,y)\right]\right)$ pero el módulo de ese vector nos sirve perfectamente para cifrar el grado de inclinación: $pendiente(x,y) = \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}$. Así queda seleccionado cada punto para cada perfil.

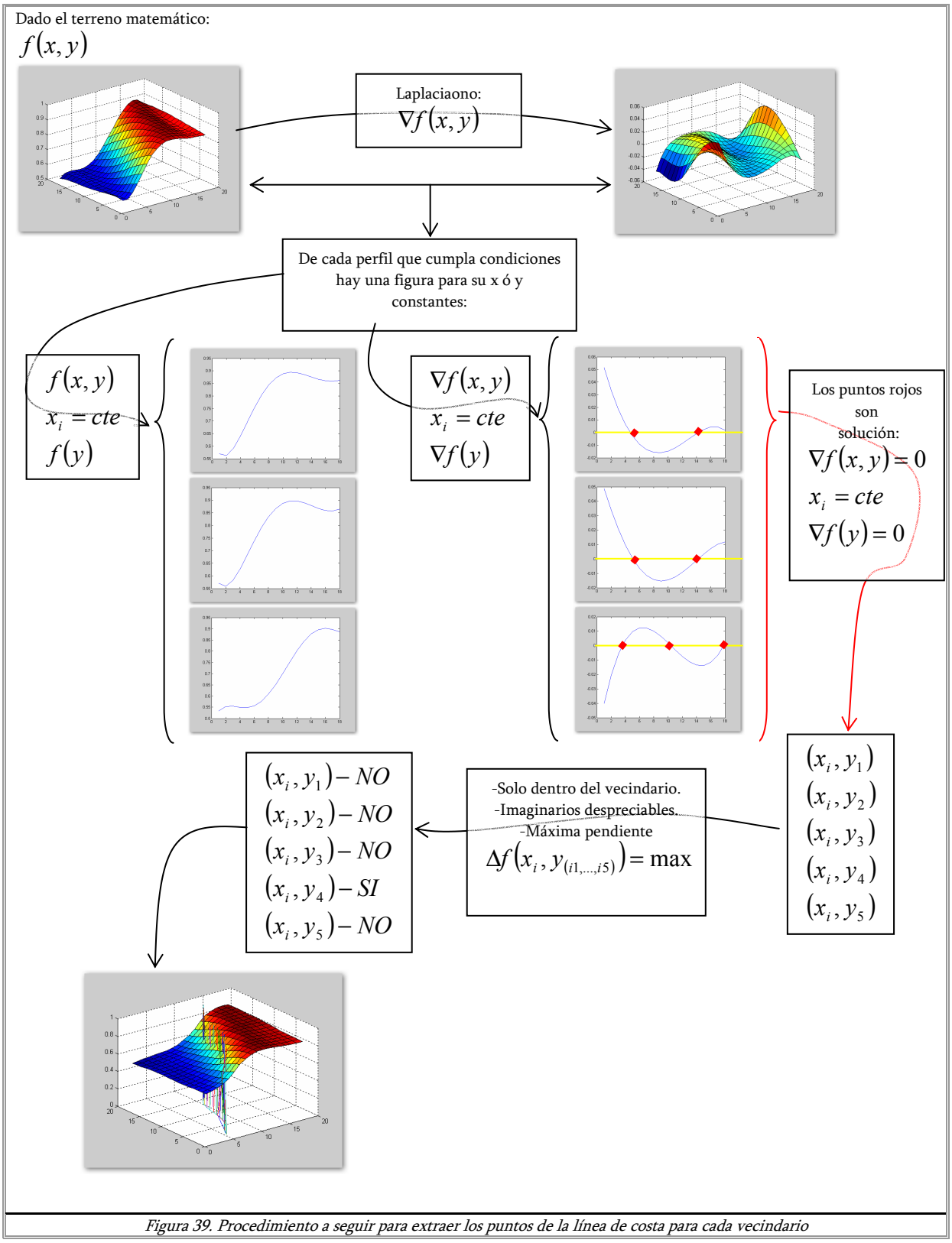


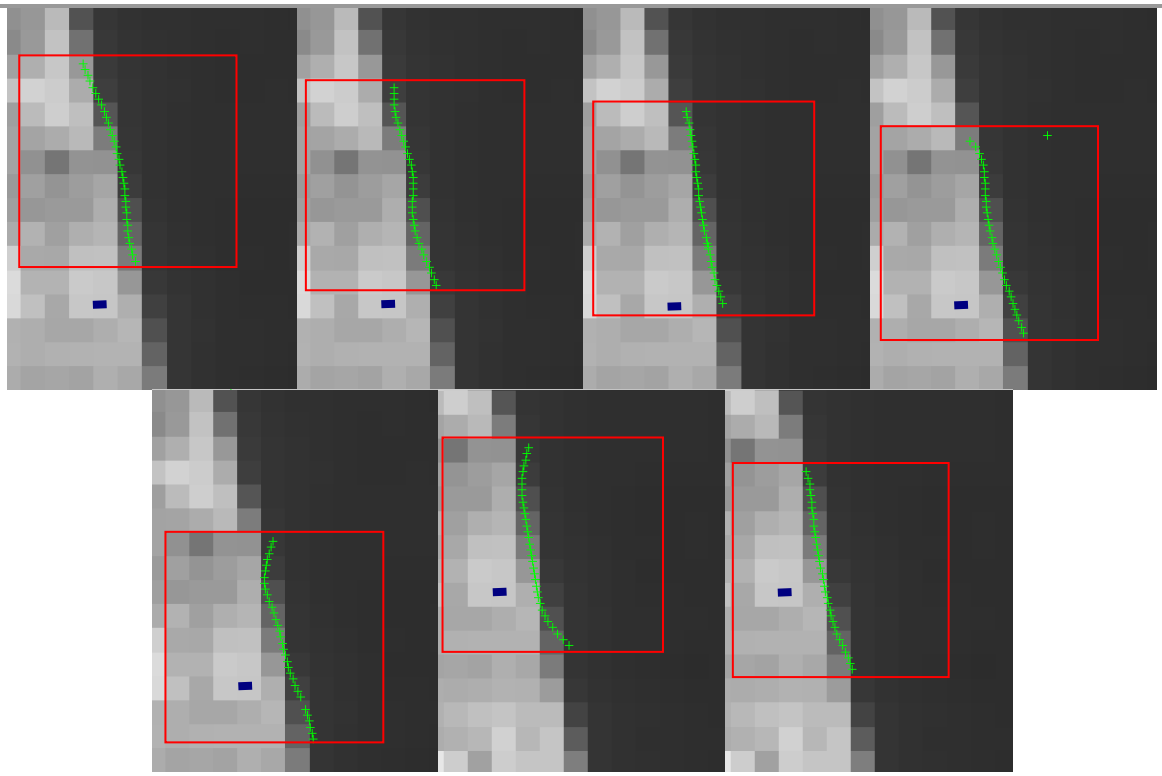
Figura 39. Procedimiento a seguir para extraer los puntos de la línea de costa para cada vecindario

6.4 Tratamiento externo de lo aportado por vecindarios

Por no perder el hilo, todo lo mencionado para un vecindario (magnitud del mismo, remuestreo, modelo matemático, resolución del laplaciano, obtención de raíces de cada perfil, filtrado de puntos, etcétera) es el conjunto de pasos a realizar ***para cada uno de***

lo píxeles de la línea aproximada inicial. Y en este caso, al contrario que en el modelo de perfiles inicial, hay más problemas para ordenar los *n* puntos que se obtienen de cada punto.

Cabe observar desde el punto de vista de la imagen en general qué estamos obteniendo:



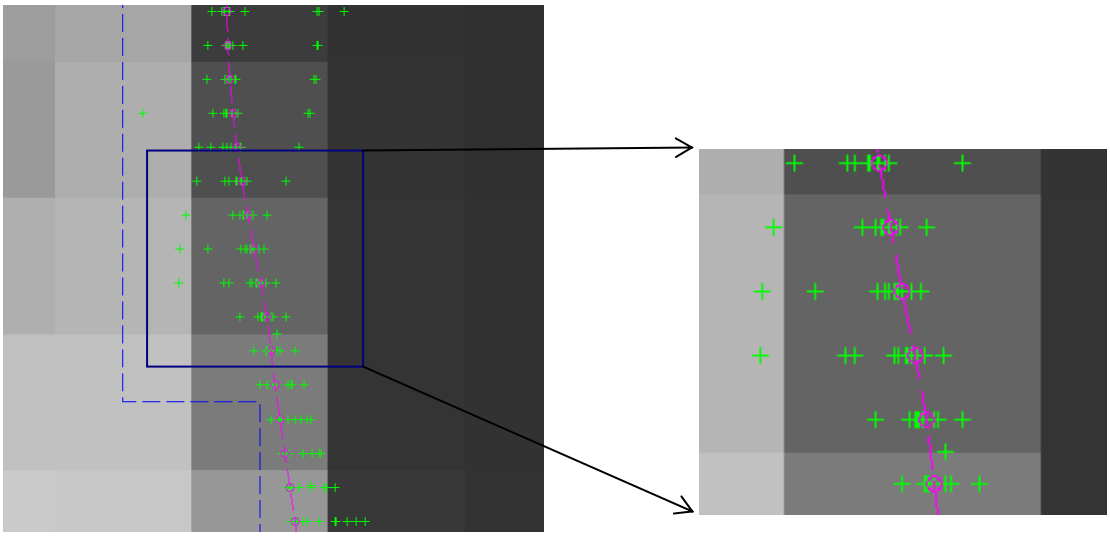
El píxel con marca azul es el mismo siempre. Se observa que la ventana de vecindario se mueve píxel a píxel a lo largo de la línea de costa. Con un factor 4, ha devuelto 4 puntos de línea por píxel, y el vecindario ha sido 9x9. El trabajo en cada píxel solapa píxeles vecinos.

Figura 40. Efecto gráfico de obtener los puntos de la línea de costa afectando el vecindario del píxel principal.

Dado que cada píxel aproximado requiere de sus vecinos para tener cierta influencia zonal, hemos excedido en cada proceso los límites del propio píxel. Como consecuencia, en cada píxel se ha modelizado la línea subpíxel desde todas las posibilidades de vecindarios a que ha pertenecido tal píxel, y, como cada vecindario es diferente, la línea subpíxel en tal píxel tendrá versiones ligeramente diferente, habrá de trabajarse con ellas para obtener el resultado definitivo.

En el caso anterior, por cada píxel se tendrá 4 puntos de la línea, pero además cada uno de esos cuatro tendrá 9 valores (uno por cada vez que ha formado parte de un vecindario) con los que habremos de promediar para obtener el valor que formará parte de le línea definitiva (véase la Figura 41).

La línea azul es la unión de los centros de los píxeles de línea aproximada. De ella surge el vecindario, En verde los consecuentes puntos provinentes de cada vecindario.



Aprovechando la condición de la forma en que se obtuvo los puntos, dando por constante la 'x' o la 'y' se observa que siguen teniendo esa condición ahora, por tanto aquellos puntos de toda la nube de puntos verdes con igual 'x' serán promediados, obteniendo así una línea (rosa) que contiene en sí la influencia zonal que buscábamos al principio.

Figura 41. Detalle del promedio de lo aportado por varios vecindarios para obtener cada punto de la línea definitiva.

Para ello, todos los puntos verdes son tratados como una nube de puntos. Dada la condición de '*x*' ó '*y*' constante, se puede aprovechar para que aquellos puntos (9 en el caso ejemplo) que tengan una coordenada igual, sean promediados. Aunque no se ha mencionado anteriormente, cabe pensar que los píxeles centrales en cada vecindario tengan más peso (el cual se ha implementado para venir asignado directamente cuando se trabaja con cada vecindario). Tiene sentido en tanto que esos *n*x*n* píxeles son los que aportan información para el terreno matemático, por tanto definirán mejor la tendencia en derredor del píxel central que en los cercanos al borde dado que a partir de ellos no se conoce qué hará el terreno. Así se prima a cada punto que esté calculado con mayor influencia de una buena descripción zonal.

Todo el conjunto de puntos verdes es filtrado evitando duplicidades. Por último, promediando los puntos verdes adecuados se obtiene otra colección de puntos (rosas), para cuya salida se ha ideado una función tal que ordena la nube de puntos resultante en orden de proximidad, así se consigue dibujar todos los puntos por orden.

7 . APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE ALGORITMOS

Una vez presentado el algoritmo de trabajo es necesario testear su precisión y establecer las primeras conclusiones de un trabajo de estas características.

7.1 Zona, condiciones y procedimiento de estudio

Geográficamente, la zona de estudio abarca una longitud de unos 11Km en la playa del Saler (Valencia). En concreto se dispone de tres imágenes de la zona del sensor QuickBird, con resolución de 2.4 metro (0.6 en la banda pancromática). Estas tres imágenes corresponden a junio de 2005, enero de 2006 y abril de 2006. Como se mencionó en el apartado de Componentes Principales, la imagen de enero de 2006 presenta un temporal que imposibilita su empleo en infrarrojos. Se podría pensar en emplear su versión de Componentes Principales pero no habría con qué testearla desde el momento la línea de referencia se genera con un trabajo de clasificación con el infrarrojo fusionado con la banda pancromática.

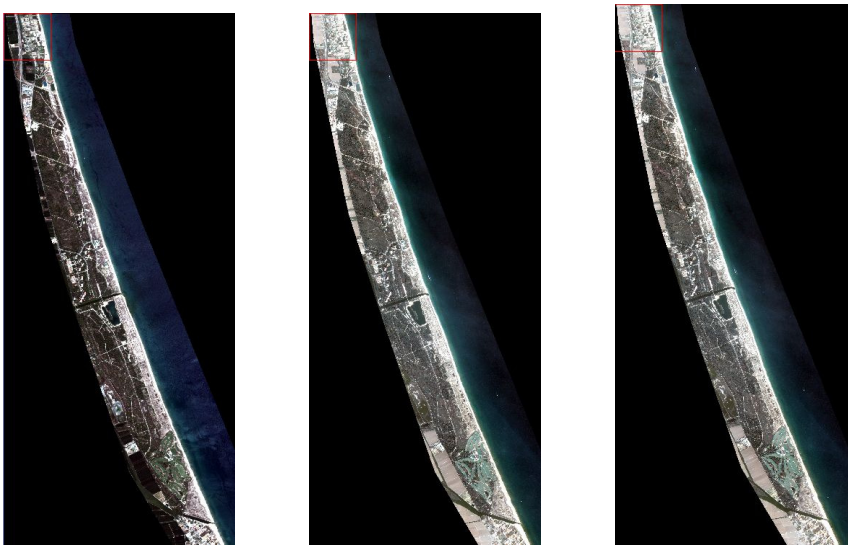


Figura 42. Zona de estudio: junio2005, abril2006 y enero 2006 respectivamente

Se va a dar dos líneas de referencia, una para junio de 2005 y otra para abril de 2006. Se basa en una labor de clasificación, como decíamos, de la fusión IR+pancromática. La precisión esperable de esa línea por tanto rondará los 0.6 metros.

La labor consiste en comparar nuestras líneas con las de referencia. Para ello nos servimos de la herramienta de análisis de ArcMap "*near*". Esta herramienta trabaja en base a dos entidades, una a evaluar y una de referencia (normalmente ambas serán *shapes*). Para cada punto de la entidad a evaluar se calcula la distancia al punto más cercano de la entidad de referencia. Así pues, dado que se trata de un SIG, a cada punto de la entidad a evaluar se le asocia un nuevo conjunto de campos como son la X e Y más cercanas de la referencia, la distancia y el ángulo formado.

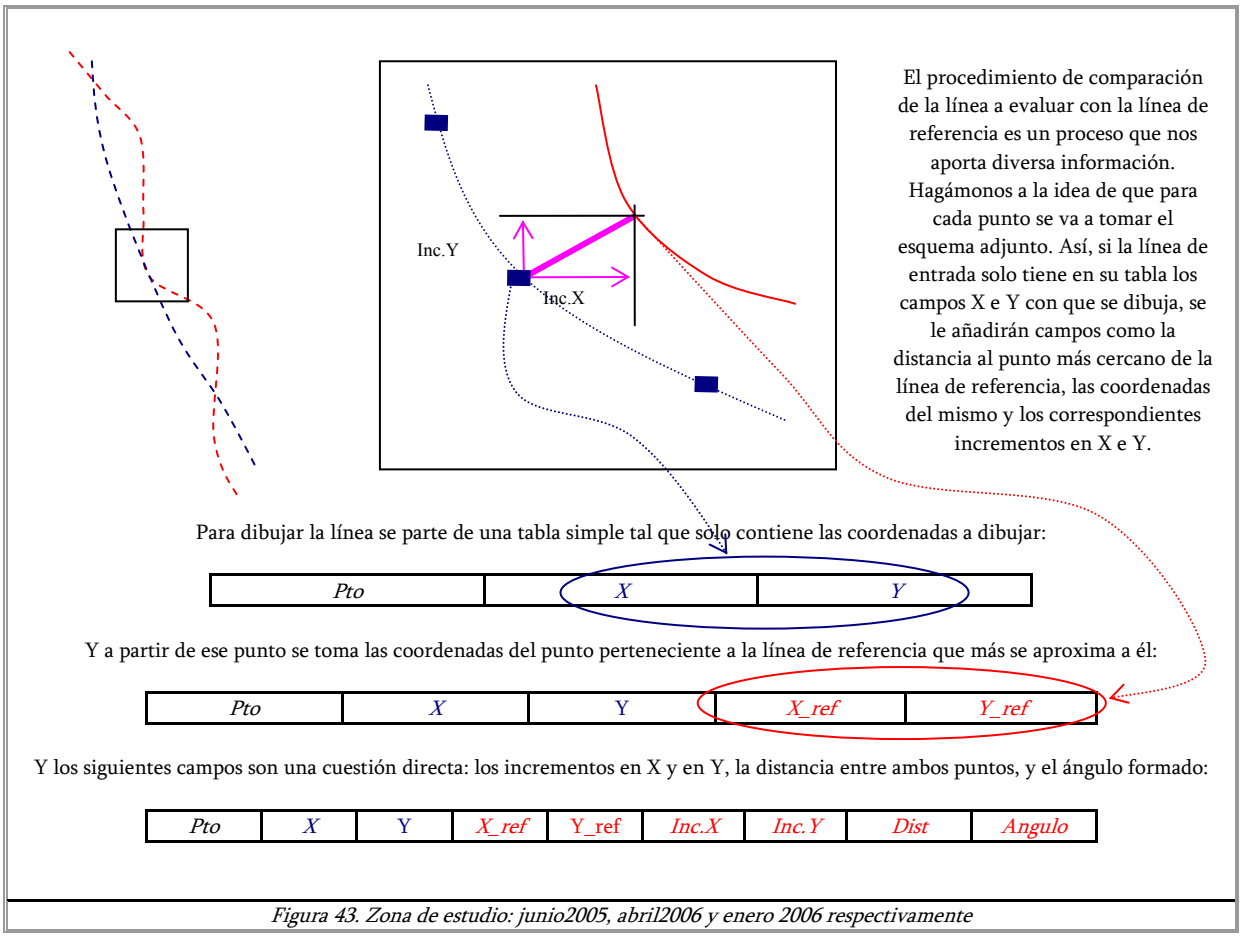


Figura 43. Zona de estudio: junio2005, abril2006 y enero 2006 respectivamente

Cabe hacer mención también a un par de conceptos con que se va a trabajar. Cuando hablemos de variar el *vecindario* estaremos refiriéndonos al vecindario tomado alrededor de cada punto a la hora de calcular la línea de costa. A su vez *factor de multiplicación* o bien *factor de remuestreo* es el factor empleado para, dado el vecindario mencionado, hacer que contenga más filas y columnas como se explicó en su momento.

7.2 Resultados

7.2.1 Error absoluto de posicionamiento

Conforme a lo explicado, el campo principal para medir nuestra precisión es la distancia a la referencia. Para ello lo que hacemos es lo siguiente; dado que para cada punto de cada línea tenemos la información anteriormente descrita, tomemos ahora el campo de "Distancia" y hagamos el promediado de todos los puntos de esa línea; será una primera magnitud de error o desplazamiento de nuestra línea respecto a la referencia. En el siguiente gráfico tomamos cada tipo de imagen y fecha (es decir, tanto junio de 2005 como abril de 2006 tienen sus versiones de cálculo en IR y en CP) por lo que podremos dibujar 4 líneas recorriendo en cada una de ellas sus diferentes resoluciones observando en cada caso el grado de acierto en obtener las línea de costa conforme hemos degradado cada una.

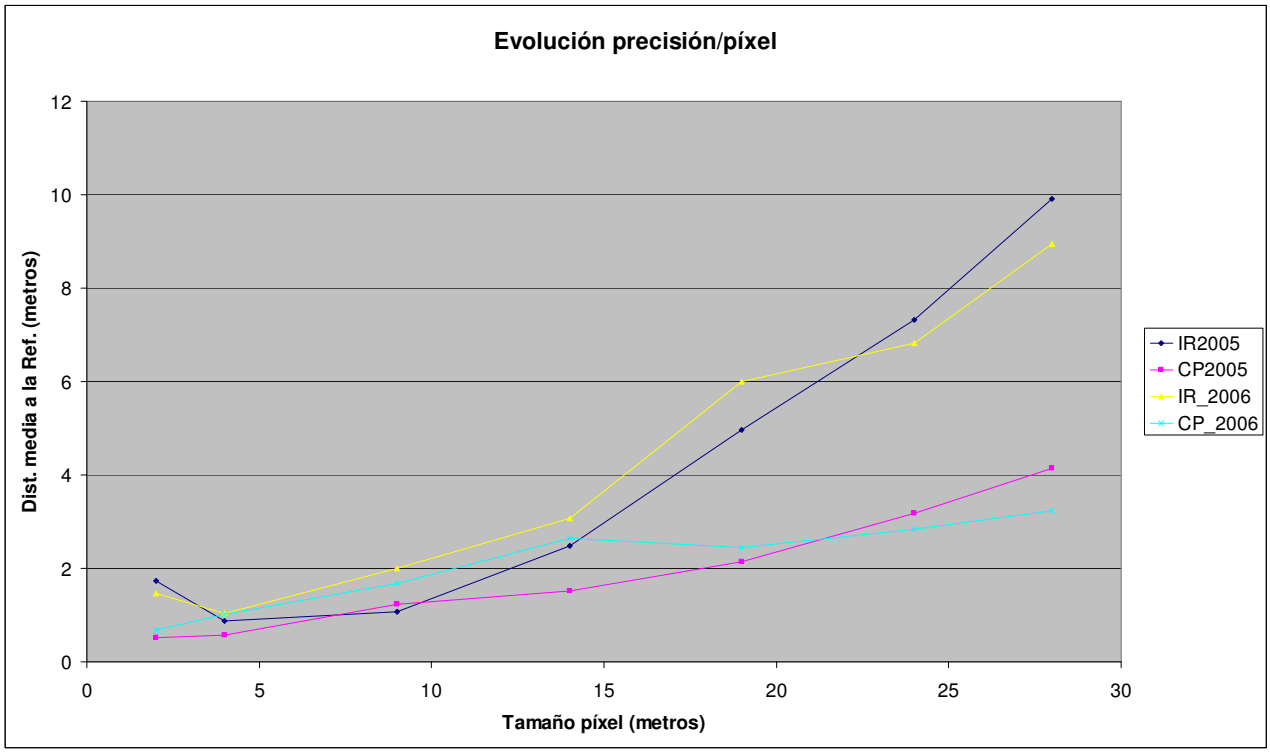


Figura 44. Alejamiento medio para cada tipo de imagen, fecha y resolución. El objetivo es evaluar el grado de acierto en ubicar la línea de costa al degradar en 4 modelos diferentes

Hagamos una observación por partes. En primer lugar, gráficamente se observa cierta linealidad ascendente en todas las curvas. Destaca el alejamiento sistemático de los infrarrojos, sin embargo no olvidemos que es un promedio de varios medios de cálculo (es decir, para cada punto dibujado no solo se ha presentado el promedio de una línea sino de varias dado que para cada imagen y resolución se ha calculados varias líneas y en el gráfico anterior se encuentran todas promediadas), pueden estar afectando varios aspectos.

Esta tendencia de aumento de distancia conforme se aumenta la distancia hace pensar que tal vez haya un sistematismo o un error en la concepción de nuestra teoría lo cual justifica el apartado siguiente de sugerencias de cálculo. Sin embargo, cabe destacar como principal conclusión del presente proyecto que, **observando que en la imagen de infrarrojos, con un tamaño de píxel de 28 metros, el alejamiento medio a la línea de referencia es de 9 metros, y que, para esa misma resolución de 28 metros de píxel, en la segunda componente principal, el alejamiento disminuye hasta los 3.5 metros, ESTAMOS HABLANDO DE UN GRADO DE PRECISIÓN DE 0.3 Y 0.12 PÍXELES RESPECTIVAMENTE. La precisión subpíxel queda patente.**

Queda por estudiar y razonar porqué el trabajar mediante componentes principales produce un acierto mayor. Lo que sí queda claro es que, si la transición de tierra y mar es progresiva en infrarrojos, en la segunda componente principal se realiza mucho más bruscamente; por alguna razón el cambio queda más localizado geográficamente y el algoritmo encuentra menos problemas en resolver la línea.

Además, cabe observar un sistematismo paralelo. Dado que la distancia a la referencia anterior es un promedio de cierto número de puntos, cifraremos el error mediante la desviación típica, obteniendo la gráfica siguiente. En general se observa la misma linealidad ascendente y cualquiera de los 4 procesos ofrece para cada resolución la

misma fiabilidad. Destaca la resolución de 14 metros en componentes de 2006, pero es posible que este aumento de la desviación sea por ser resultado de varias líneas de la misma resolución calculadas con varios métodos, por tanto vendríamos a interpretar que es el caso en que, variando el método de cálculo (variación de vecindario, factor y valor de umbral de tierra y mar) más consecuencias tiene en el resultado, no en vano es el segundo caso de línea que más puntos ha procesado:

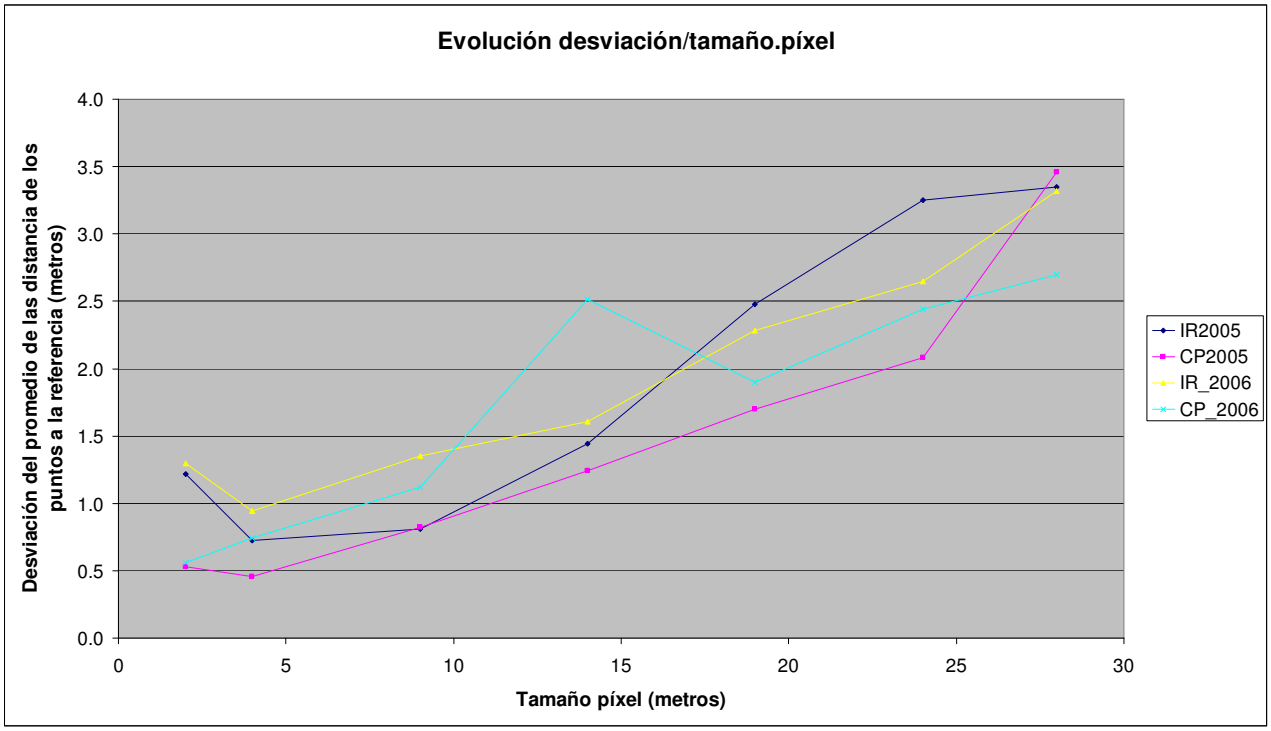


Figura 45. Evaluación de la desviación estándar de la distancia media a la referencia

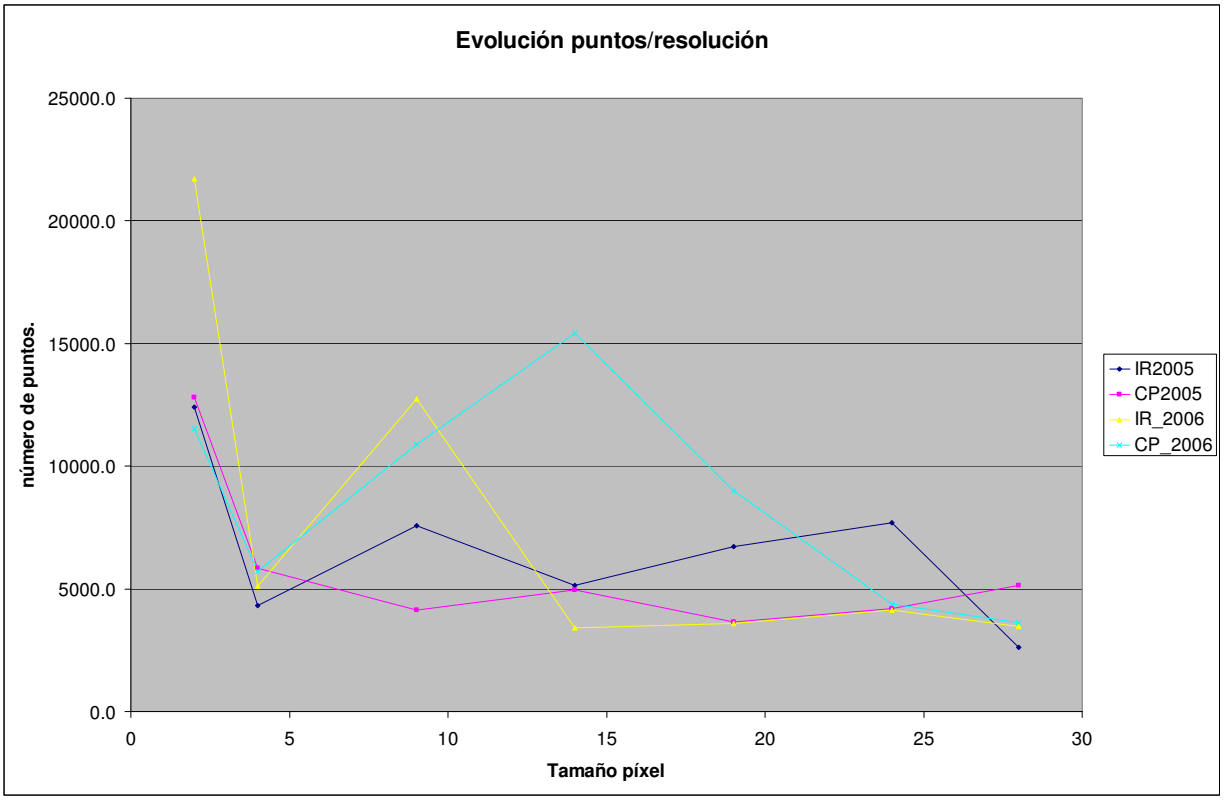


Figura 46. Número de puntos de la muestra

Para comprender mejor el significado de la desviación hagamos para cada imagen la representación de su media dentro de su desviación:

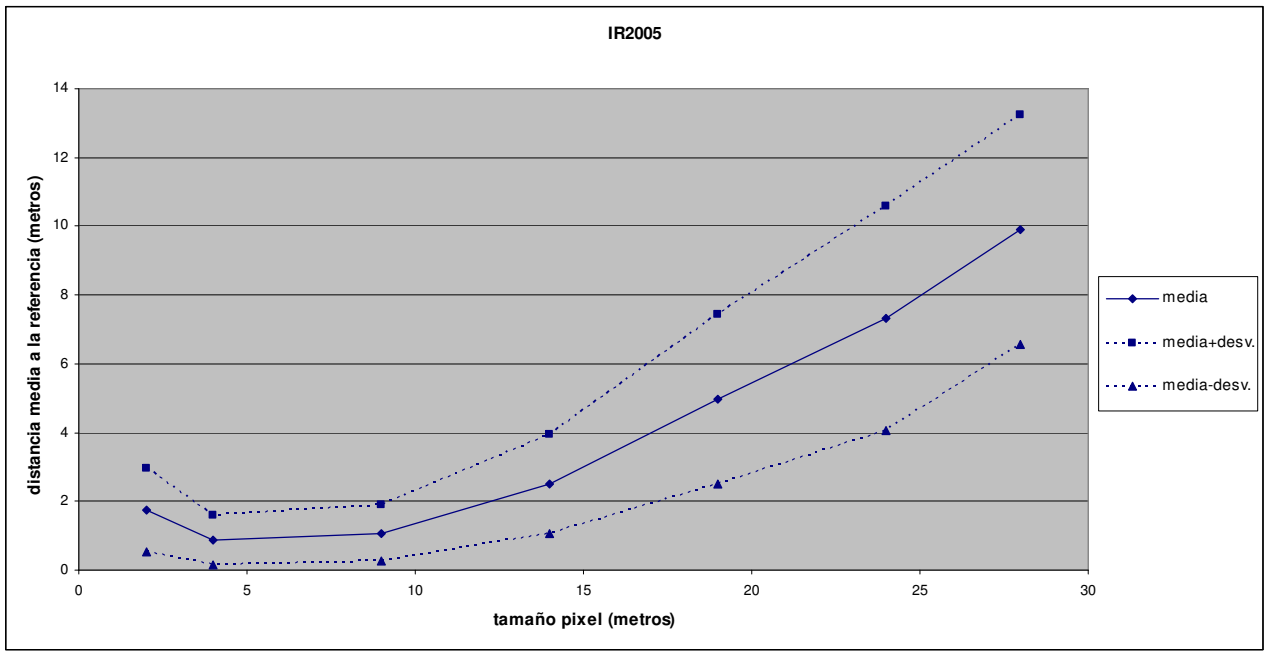


Figura 47. Imagen de2005 en IR media ± desviación

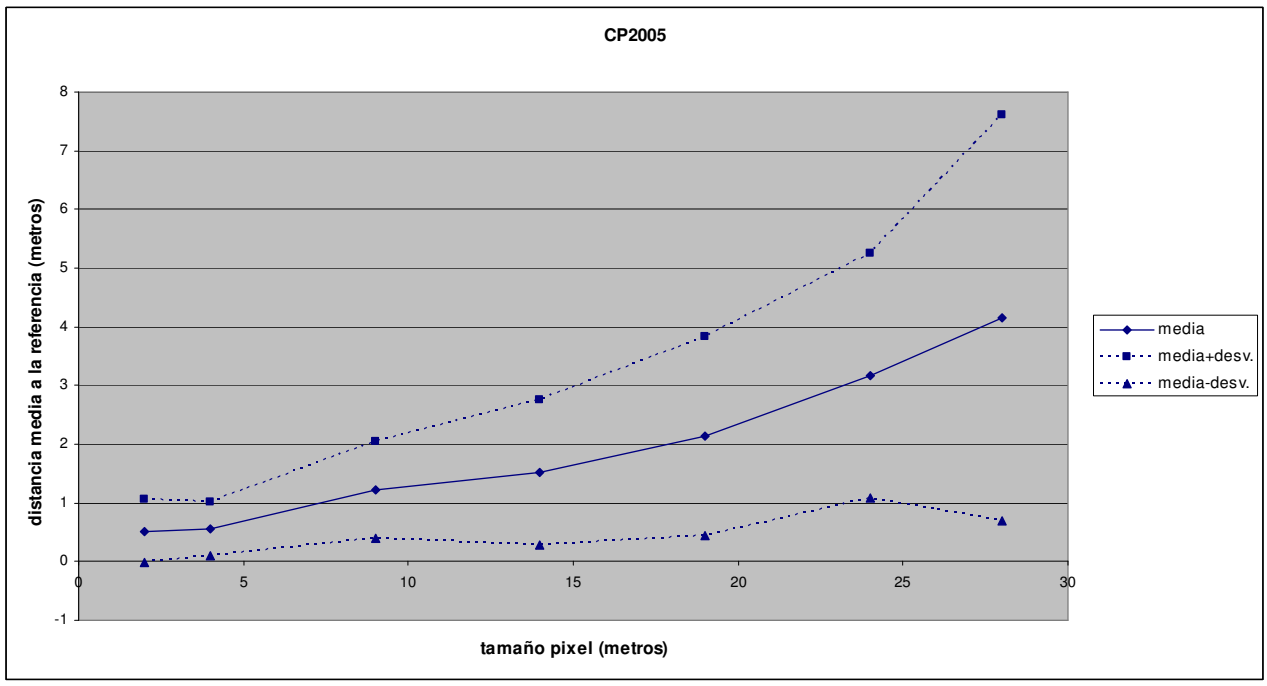


Figura 48. Imagen de2005 en CP media ± desviación

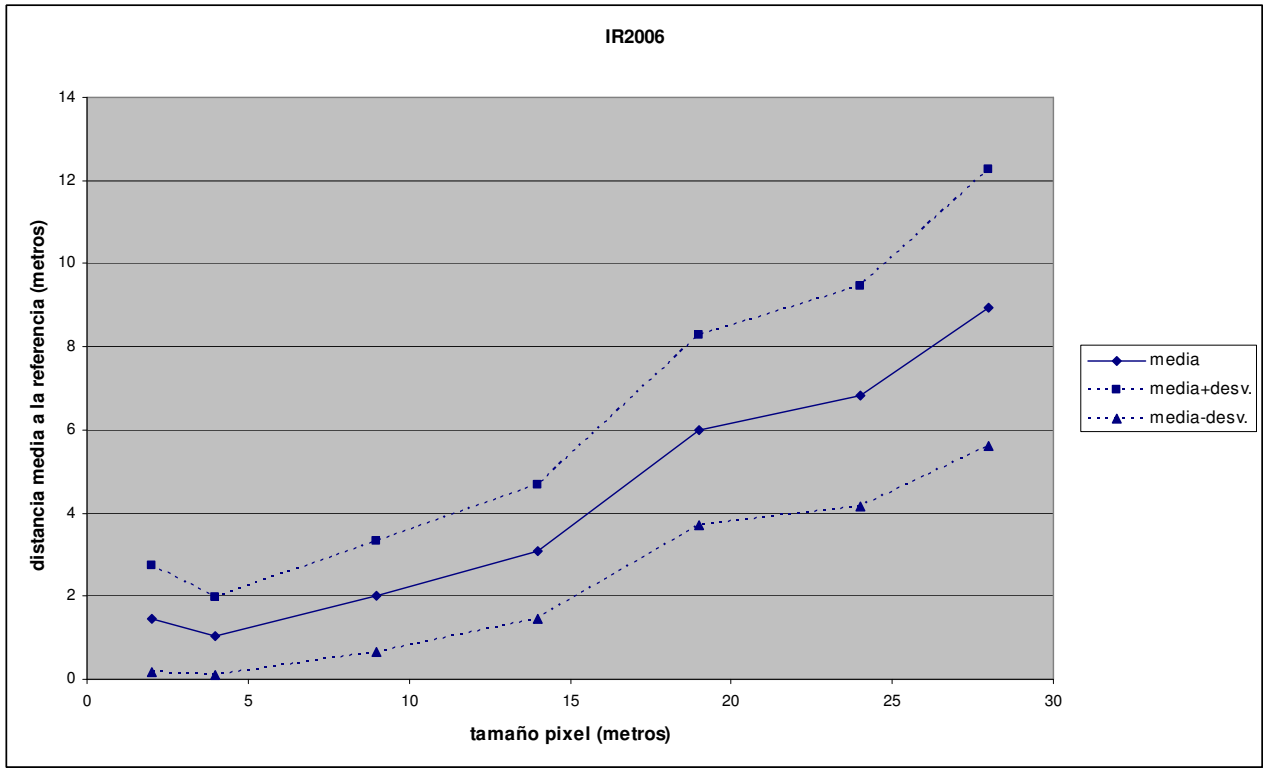


Figura 49. Imagen de2006 en IR media ± desviación

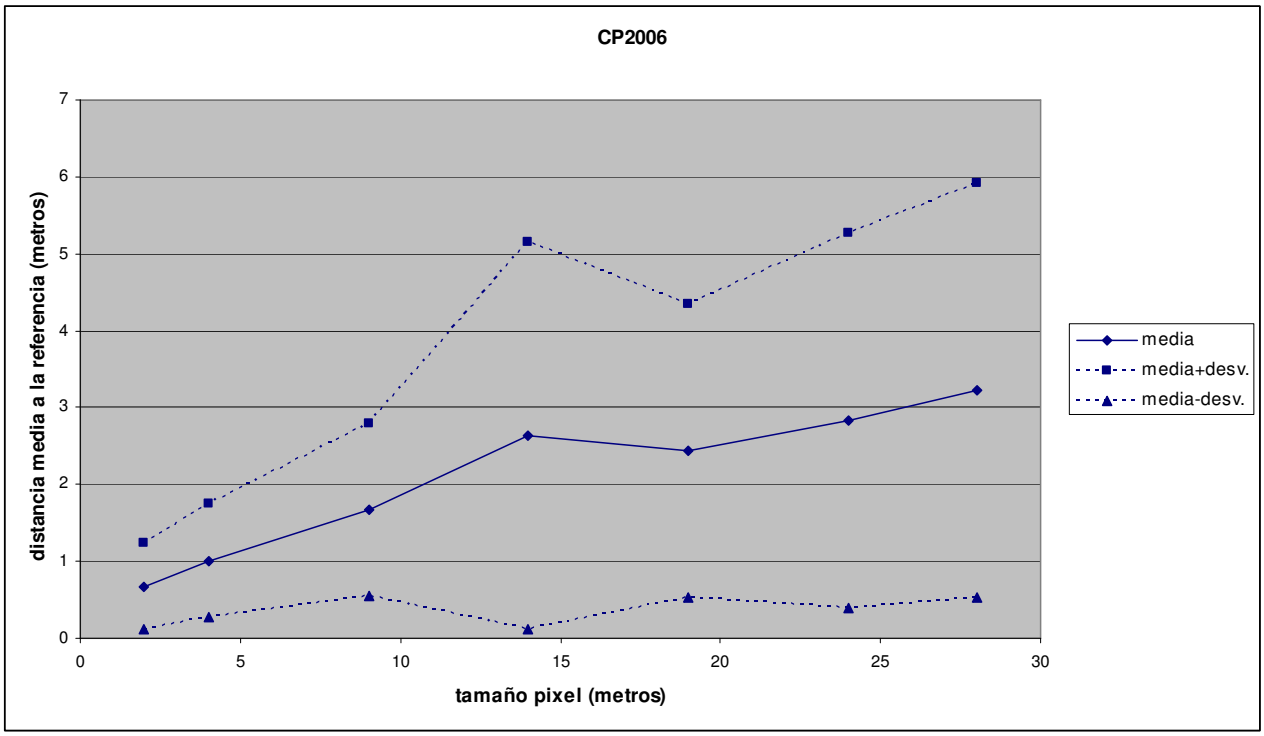
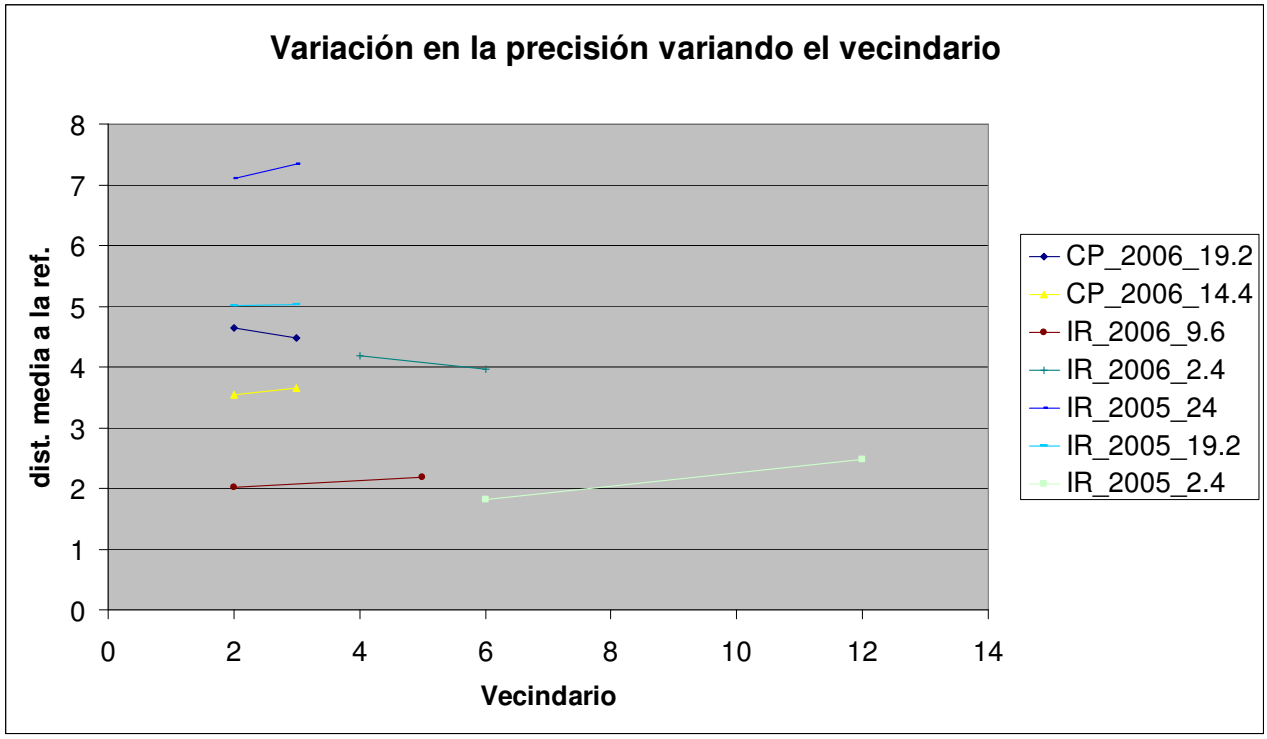


Figura 50. Imagen de2006 en CP media ± desviación

7.2.2 Efecto visual de variación del vecindario y el factor de remuestreo

En el momento de realizar la pruebas no se prestó atención a crear una batería de pruebas que permitiera evaluar objetivamente si la variación independiente del vecindario o el factor de demuestro afectan a la separación respecto a la línea de referencia. Aún con todo, la experimentación propia dejó entrever que ninguno de los dos factores se comporta sistemáticamente, no por aumentar o disminuir ninguno de los dos valores se acrecienta o disminuye el error cometido. Así lo demuestra el no encontrar sistematismo ninguno en la siguiente gráfica.



No se encuentra sistematismo ninguno por el que concluir que variando el vecindario se mejor o disminuye la precisión.

Figura 51. Gráfica en que se representa el acercamiento o alejamiento a la línea de referencia en función del vecindario. NOTA: el valor de abscisas no es el vecindario directo, un valor de 2 implica 5x5 vecinos, 3 es 7x7, 4 es 9x9, etc..

De todas formas una conclusión visual referente al ***vecindario*** y al ***factor de multiplicación*** pueda ser más reveladora. Realicemos un zoom a zonas análogas de la misma imagen para ver la variación del resultado. Tomamos una zona de Componentes Principales de la imagen de abril de 2006 a resolución 19.2:

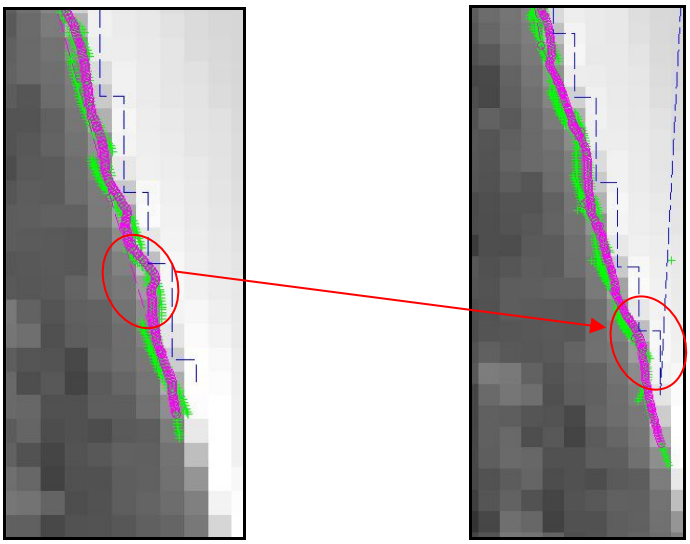


Figura 52. Efecto visual del vecindario. En la imagen izquierda s ha tomado 5x5 vecinos, y 7x7 en la segunda. El efecto de aumentar el vecindario obliga a la función a repartir en más espacio sus posibilidades de curvatura por lo que permite menos ondulaciones provocando un suavizado.

En el análisis de curvas mencionado en apartados anteriores. Si la línea se puede curvar 5 veces, pensemos que al añadir vecindario, debe repartir esas curvas en más espacio, y la consecuencia directa es un mayor suavizado lo que impide curvas extrañas, servirá mejor para mostrar la evolución de la zona de costa.

Sin embargo el efecto de cambiar el factor de multiplicación no genera apenas modificaciones:

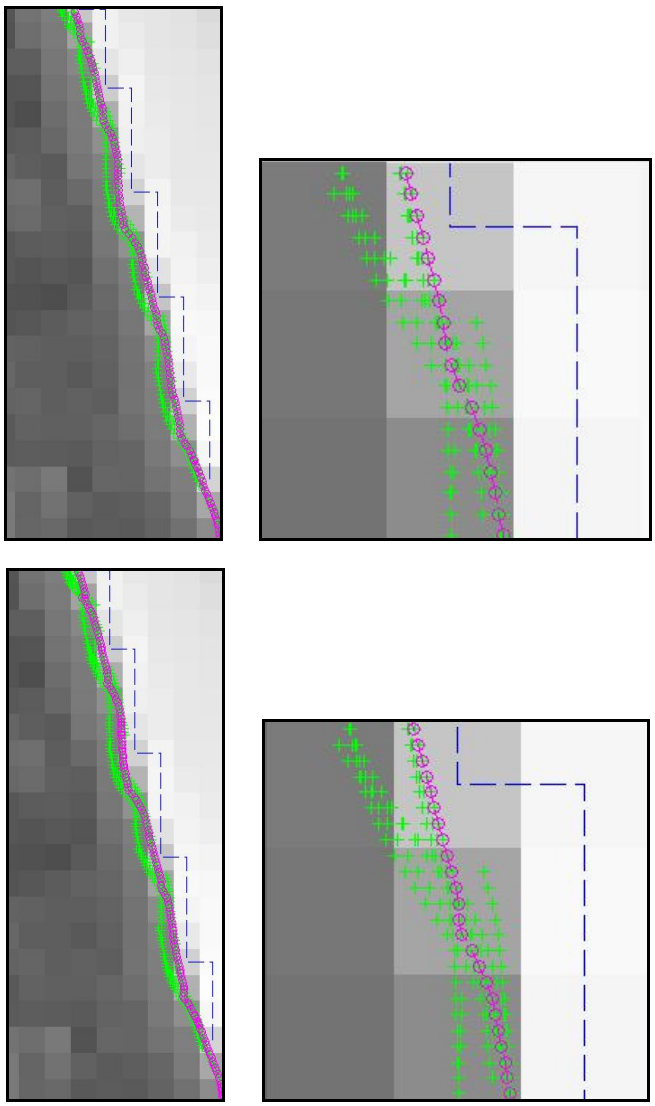


Figura 53. Efecto visual del factor de multiplicación. Este factor de remuestreo ha demostrado no afectar mucho visualmente pues lo único que hace visualmente es añadir puntos a la misma línea.

Podemos desmenuzar un poco más lo representado en la primera gráfica. En las imágenes de mejor resolución podemos encontrar, lejos de lo que pudiera parecer, más problemas. Su error en concreto es generado por un exceso de detalle. Las imágenes a 2.4 metros son capaces de detectar el área de mojado, lo cual genera diversos gradientes, tierra-mojado y mojado-mar o bien se puede generar incongruencias al detectar la espuma levantada por el oleaje. Como es normal, estas zonas son las primeras que se difuminan al degradar la imagen y parece que con ello a partir de 4 metros de resolución queda solventada esa característica. Obsérvese:

Figura 54. Misma zona en tres fechas. Observación áreas de mojado y oleaje.

Por tanto, si se va detectando y dando saltos entre tierra-mojado y mojado-mar, la distancia a la referencia cabe esperar que, efectivamente, aumente. Sin embargo, no es el objetivo de este trabajo mejorar la precisión en imágenes con 2.4 metros de resolución.

Pero resulta que el mismo problema lo podemos encontrar con imágenes de píxel mayor a 19 metros puesto que el vecindario puede llegar a abarcar con pocos píxeles algún punto del interior de la costa que genere un gradiente mayor y se detecte mal los puntos definitivos:

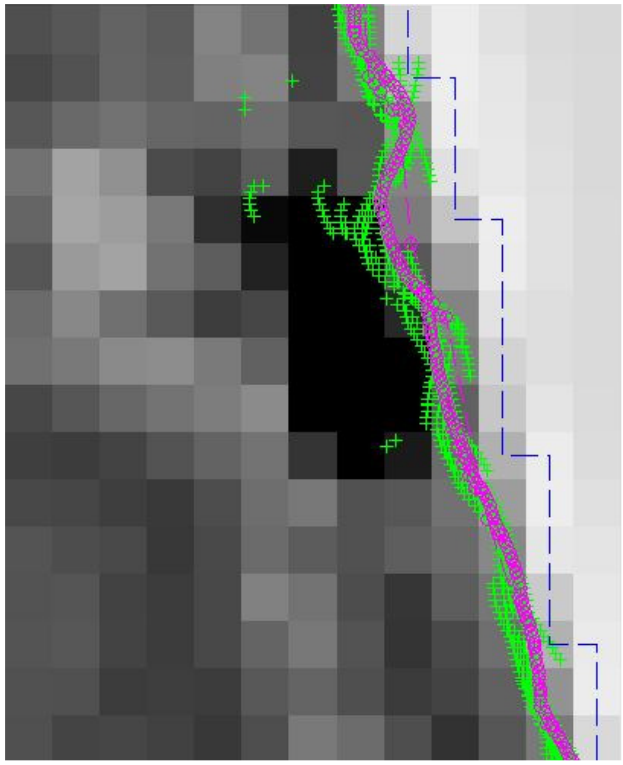
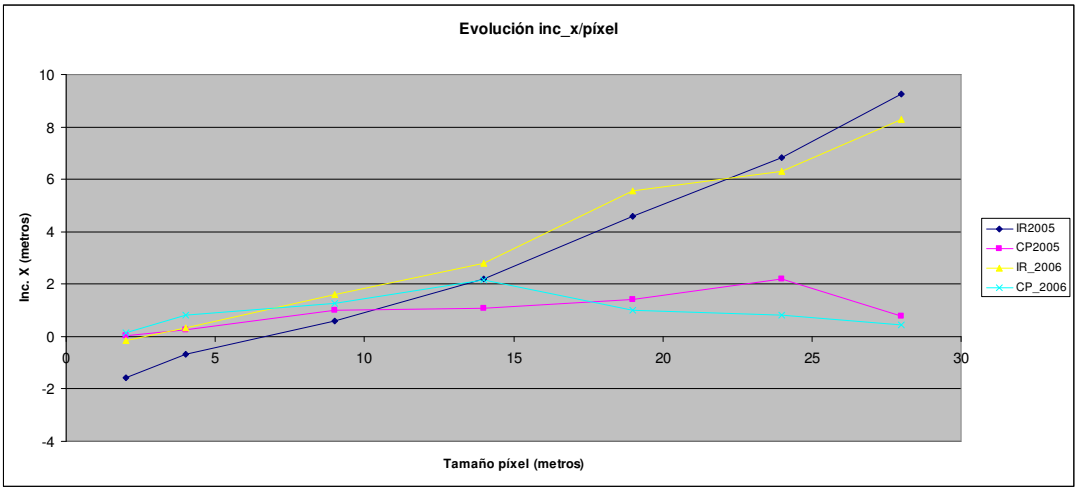
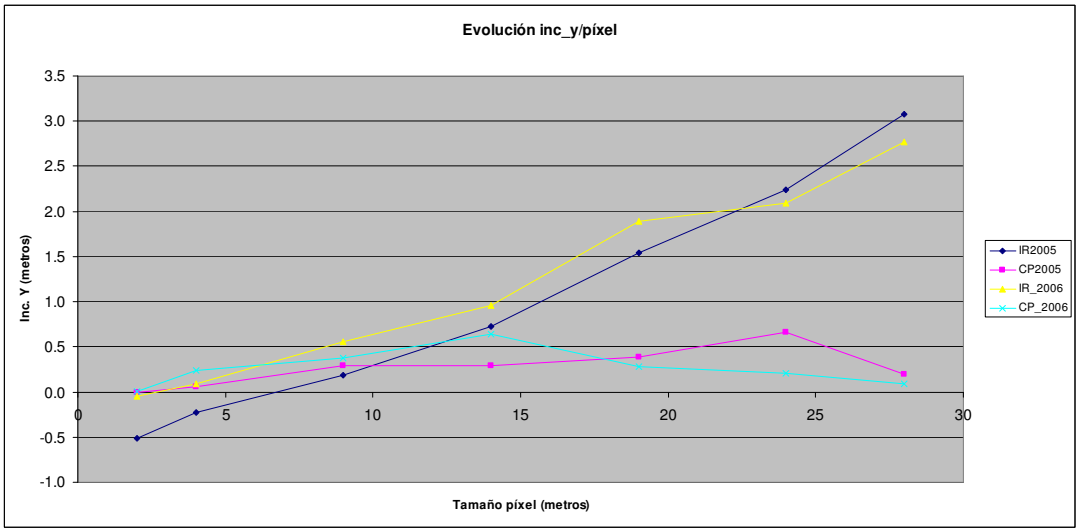


Figura 55. Efecto de un gradiente incorrecto en píxeles cercanos a la costa

7.2.3 Tendencia direccional del error de posición

Lo que presentamos ahora es la consecuencia de la siguiente *duda razonable*, en la primera gráfica de precisiones (Figura 44) se presenta como cifra del error el promedio de distancia de cada punto de la línea a evaluar respecto al punto de la línea de referencia. Esta forma genera un problema directo *no tiene en cuanta si esa distancia de cada punto es por desplazamiento hacia la tierra o el mar*. Para dar un análisis alternativo aprovechamos las coordenadas medias de ambas líneas (obtenidas mediante la orden *near* como se dijo) en concreto los campos de incremento que se explicó anteriormente: *inc.x* e *inc.y*. Pensemos lo siguiente. Lo que hemos representado en el primer punto es el promedio de las distancias de cada punto de nuestra línea a la referencia, *hemos perdido el signo de ese desplazamiento, no se sabe si es hacia donde se orienta esa incorrección*. Así pues: hagamos un promedio de los desplazamientos en cada coordenada, en tal caso no perderemos el significado del signo:





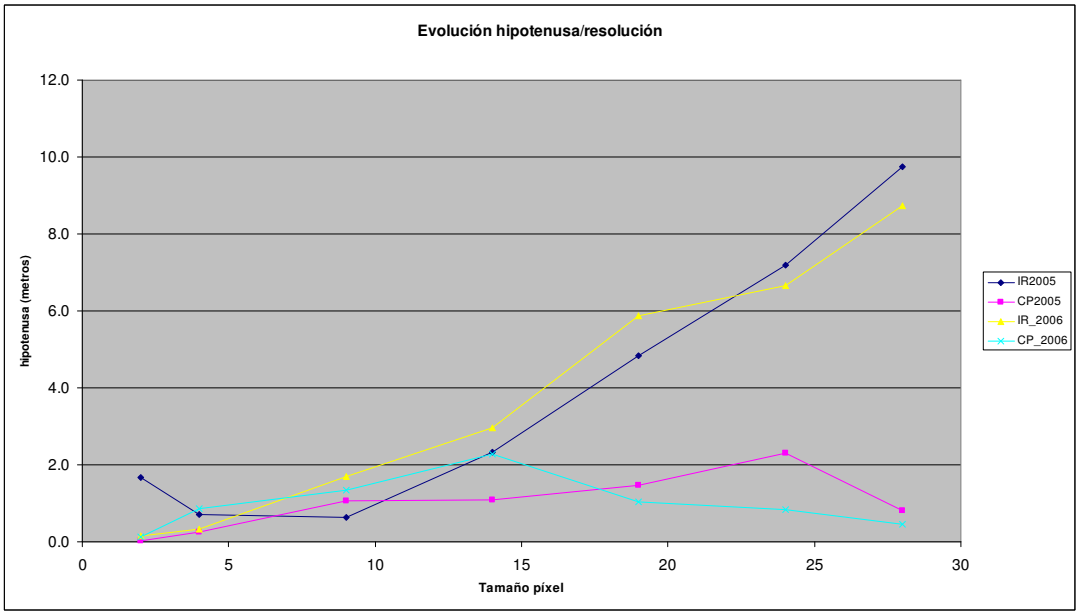


Figura 56. Para no perder el significado del desplazamiento, es decir, su signo, se presenta los desplazamientos medios en x, en y; añadiendo la medida absoluta media de ese desplazamiento.

La zona de estudio es una costa de norte a sur, de ahí que el incremento mostrado sea mayor en *x (coordenada horizontal)* que en *y (coordenada vertical)*. En cualquier caso parece que se verifica cierto sistematismo de alejamiento de la costa conforme se disminuye la resolución de la imagen con que se calcula. Lo que hemos denominado *hipotenusa,* y que hemos desglosado cómo se calcula (y si somos un poco más observadores podemos pensar que esa hipotenusa será como calcular la magnitud del desplazamiento global entre las dos líneas, es decir, si calculáramos una X e Y promedio para cada línea, la nuestra y la de referencia, su desplazamiento sería el mismo valor que hemos nombrado hipotenusa) es una medida global de desplazamiento entre las dos líneas que puede considerarse más significativa y real que el promedio de todas las distancias absolutas de todos los puntos de cada línea como se hacía al principio. ***Es la hipotenusa la que nos da una mayor información relevante de la precisión obtenida puesto que ahora sí cifra un desplazamiento medio de la línea y donde los IR mantienen el sistematismo, las CP mantienen constante el error asombrosamente, lo cual las pone en clara disposición para detectar la evolución de costas en zonas de marítimas***.

8 . CONCLUSIONES

Existiendo dos objetivos básicos que son el ***automatismo*** y la mejora de la ***precisión*** en la detección de la línea de costa, podemos evaluar positivamente ambos. Cierto que en cuanto a automatismo, no es un proceso absolutamente directo por el que con dar a un solo botón se lance un proceso automático, pero si comparamos el escoger unos pocos parámetros y evaluar kilómetros de costa frente a tener que hacerlo a mano, es un avance importante. Y en cuanto a los resultados de la teoría matemática, se ha verificado una mejora sustancial. Por tanto, ***los dos objetivos principales del proyecto han sido alcanzado.*** Pudiendo además dar un resultado conjunto puesto que hasta ahora si se dibujaba a mano la línea de costa ¿se estaba consiguiendo la precisión subpíxel real?

En lo referente a la precisión, podemos enfrentarla a los resultados existentes. En los antecedentes se recopiló precisiones obtenidas en la detección de costa hasta el momento rondando los 75 metros (trabajando con píxeles de 25x25 metros) en imágenes RADAR [14], y 39 metros (píxeles de 30x30) en un trabajo con imágenes actuales de LandSat [15]. En comparación, nosotros hemos obtenido precisiones de ***9 metros y 3.5 metros con infrarrojos o segunda componente principal respectivamente con imágenes de 28x28 metros de resolución***. Visto de un modo relativo, donde se alcanzaba precisiones precisiones de 3 píxeles con RADAR [14] y 1.3 en LandSat [15], ***alcanzamos 0.3 y 0.12 píxeles de precisión***

Como objetivos añadidos se incluía la realización de una buena memoria. No es este el momento de evaluar este punto pero el tiempo dirá si con este manual se ha podido dar pie a continuar las investigación con comprensión y claridad partiendo de lo que han sido las ideas hasta ahora.

En cualquier caso la aplicación de este trabajo tiene dos salidas directas en el departamento. En primer lugar para poder realizar estudios evolutivos de las costas en zonas micromareales como las valencianas, pudiendo emplear imágenes multiespectrales de sensores más antiguos y de menor resolución. Cabe recordar que mediante componentes principales, la posición media de la costa con un píxel de 28 metros es *igual* a la precisión con resolución de 2.4 metros. Pero he aquí un problema, imágenes de menor resolución carecen de buena precisión (por el insistente tamaño de píxel) para georreferenciarse. Así nace la segunda idea de aplicación del algoritmo desarrollado puesto que se puede tomar escolleras, puertos, acantilados rocosos permanentes, etc. como puntos de control para la georreferenciación de esas imágenes. Por tanto estamos dando pie con este proyecto a poder goerreferenciar imágenes satelitales con mucha mayor precisión que la posible hasta ahora.

9 . PROPUESTAS DE TRATAMIENTO

En este apartado proponemos ideas y sugerencias que bien pueden llevar a una solución alternativa, a resolver problemas algorítmicos actuales, a completar la programación o a emplear alguna propuesta, con las modificaciones pertinentes, para otros fines.

9.1 Punto de máximo laplaciano

Se trata de un cambio en el enfoque interpretativo, y consecuentemente de cálculo, con que encontrar la línea de costa. La idea surge cuando se observa, en los primeros resultados, cierto sistematismo en el que las líneas resultantes, cuanto mayor fuera el tamaño de píxel de la imagen, más se adentraban en el mar. Buscando justificación para este sistematismo surge el dudar incluso de nuestra hipótesis primera y plantearnos otra posibilidad ¿y si en vez de buscar el punto en que la influencia de tierra y mar se mantienen en equilibrio debemos buscar ***el punto en que el mar comienza afectar a la gráfica*** provocando cambios en la curva que describe? Ello obliga a dejar de pensar en un cambio del sentido de curvatura. Hipotetizamos ahora que la línea de costa está en el punto en que la curva de caída adquiere su punto de cierre máximo, que será un punto próximo a la cresta de tierra que da paso al mar, pero no la propia cresta.

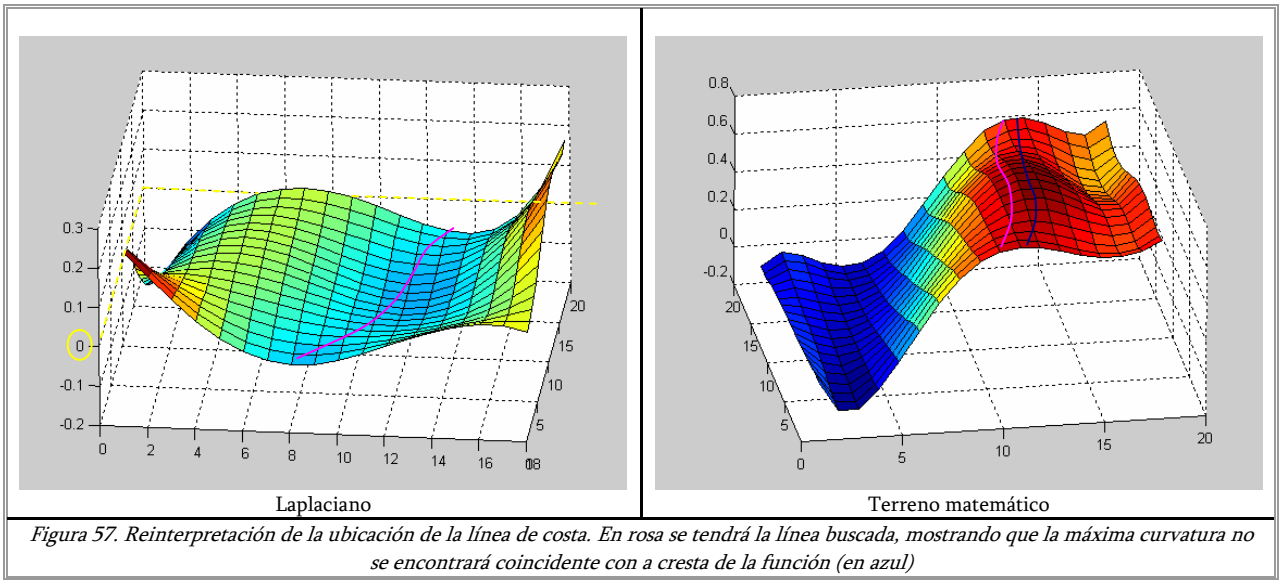


Figura 57. Reinterpretación de la ubicación de la línea de costa. En rosa se tendrá la línea buscada, mostrando que la máxima curvatura no se encontrará coincidente con a cresta de la función (en azul)

En la figura anterior (Figura 57) se observa el laplaciano y el terreno matemático que lo origina. En el terreno matemático se pretende presentar dos líneas, en azul presentamos la cresta de dicho terreno, el punto más elevado o línea divisoria, en rosa presentamos la hipotética línea (difícil de interpretar e incluso de ubicar) en que el radio adquiere su mínimo. En el laplaciano se representa la zona que recorrería la línea rosa, adquiere un máximo de curvatura negativa (hay que comprender que el signo es un sentido de giro, puede haber máximos positivos y negativos, según el sentido de la curva). Para plantear un caso exagerado de una curva en que se pueda diferenciar entre ambas curvas veamos la Figura 58:

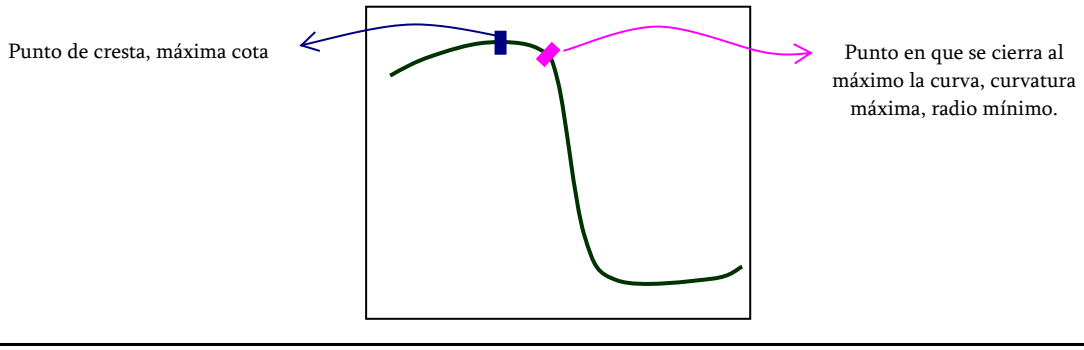


Figura 58.Diferenciación entre la cresta y la máxima curvatura tal y como indicábamos en la imagen anterior, pero ahora en un detalle exagerado y solo en un perfil.

Los problemas que nos encontramos ahora son de diversa índole: en primer lugar, la zona en que la curvatura es máxima no la podemos entender con una idea tan cómoda como hacer el laplaciano nulo, ***ahora la línea puede recorrer tanto crestas como valles en la superficie del laplaciano, y esa propia línea tendrá desniveles en su recorrido***. De nuevo se recurre al análisis de curvas en lo referente a detectar máximos y mínimo de una función. Hemos de encontrar máximos y mínimos a la función laplaciana de nuestro terreno matemático. Primer problema: un punto de ese valle que se dibujaba en rosa en el laplaciano de la Figura 57 no es un mínimo real de la función pues, a modo de río, a su alrededor la función puede seguir descendiendo o ascendiendo. Segundo problema: los máximos y mínimos se calculan anulando la primera derivada y, en el caso de dos variables, son las componentes de la función gradiente las que deben anularse. Son, por tanto, dos valores a anular y, dado lo dicho, es posible que alguna o ninguna de las dos se anulen en ese valle que recorre la línea, ¿Cuál o cuáles de esas componentes de gradiente deben emplearse y cómo?, ¿cómo hacerlo para, además, solventar el problema de sacar puntos reales desde una idea matemática?

Esas preguntas son las primeras que surgen y por ello se mencionan pero, sin embargo, no perdamos que intuitivamente sí sabemos qué línea queremos dibujar, existirá algún artificio para transformarlo en condiciones matemáticas.

Yendo por orden, escribamos en los siguientes subapartados el camino recorrido de peor a mejor idea y resultado en la búsqueda de encontrar los métodos para llegar a nuestro objetivo intuitivo.

ADVERTENCIA: Es una exposición que puede llevar a confusión por la nomenclatura empleada y perder con ello la visión intuitiva, aclaremos:

$f(x,y) \Rightarrow$ Terreno matemático. Imagen derecha de Figura 57.

$f(x), f(y) \Rightarrow$ Función que describe el terreno matemático en cada uno de sus perfiles (cuando 'y' ó 'x', respectivamente, han tomado valor constante).

$\left.\begin{matrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla f(x), \nabla f(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Laplaciano del terreno matemático, imagen izquierda de Figura 57. Y sus respectivos perfiles.

Las derivadas se indicarán teniendo por subíndice la variable con que se haya derivado la correspondiente función, y repitiendo la letra tantas veces como derivadas sucesivas respecto a la misma se hayan realizado. Por

ejemplo: $f_x(x,y), f_y(x,y), f_x(x)...\nabla f_y(x,y), \nabla f_x(x)$. **Por último, todas las operaciones indicadas en los subapartados siguientes se encuentran en su formulación completa en el anejo (pg 88)**

9.1.1 Perfiles a la función original

Este primer procedimiento es incorrecto pero cabe presentarlo para resaltar un error que, por despiste, podría repetirse. La idea parte de emplear cada perfil del terreno matemático original y analizar a partir de él. El resumen procedimental se representaría de la siguiente forma:

$$f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = cte \rightarrow f(y) \Rightarrow f_{yyy}(y) = 0 \\ y = cte \rightarrow f(x) \Rightarrow f_{xxx}(x) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Dado el terreno matemático original, comenzaríamos por tomar la función de cada uno de sus perfiles. La primera derivada de ellos nos daría sus pendientes, la siguiente sus curvaturas y, dado que es de esta última de la que queremos los máximos y mínimos, debemos volver a derivar e igualar a 0. Eso es lo que queda representado en el procedimiento anterior. Veamos dos resultados. En primer lugar si calculamos con la función de orden 5 y el proceso anterior:

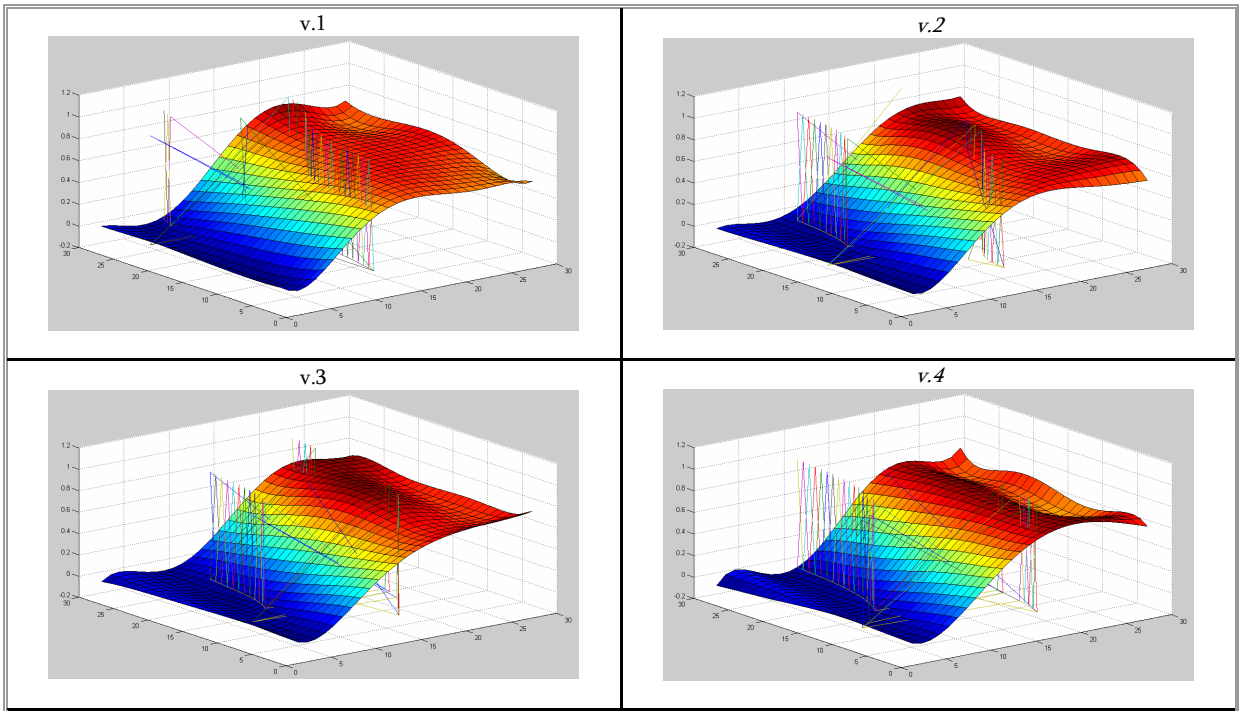


Figura 59. Obtención de puntos por máxima curvatura de cada perfil. Estos cuatro vecindarios van a ser los mismo durante todo el siguiente apartado pudiendo observar en ellos los diferentes efectos de cálculo

En primer lugar hagamos frente a un problema, se está detectando puntos de máxima curvatura (por lo pronto, asumamos que es así), pero tanto la que corresponde a la zona marina como a la terrestre, puesto que cada perfil tiene uno de cada, pero el filtro está mal diseñado y da en cada caso uno de ellos como correcto. Dado que el polinomio de cada perfil es de grado 5, su tercera derivada es de grado 2 por lo que estamos observando, de cada punto, una de las dos soluciones posibles (en la pg. 86 se realiza una visión polinómica que permite observar soluciones múltiples). ***Sirva este resultado para advertir que de las soluciones múltiples que en ocasiones obtenemos, es primordial diseñar bien el filtro para tomar la solución correcta.*** A continuación

presentamos esos mismos vecindarios pero el punto escogido de las dos opciones será aquel que tenga mayor "cota", es decir, que pertenezca a la zona de tierra (recordemos que el sistematismo que buscamos resolver es aquel que adentra la línea en el mar según aumenta el tamaño de píxel):

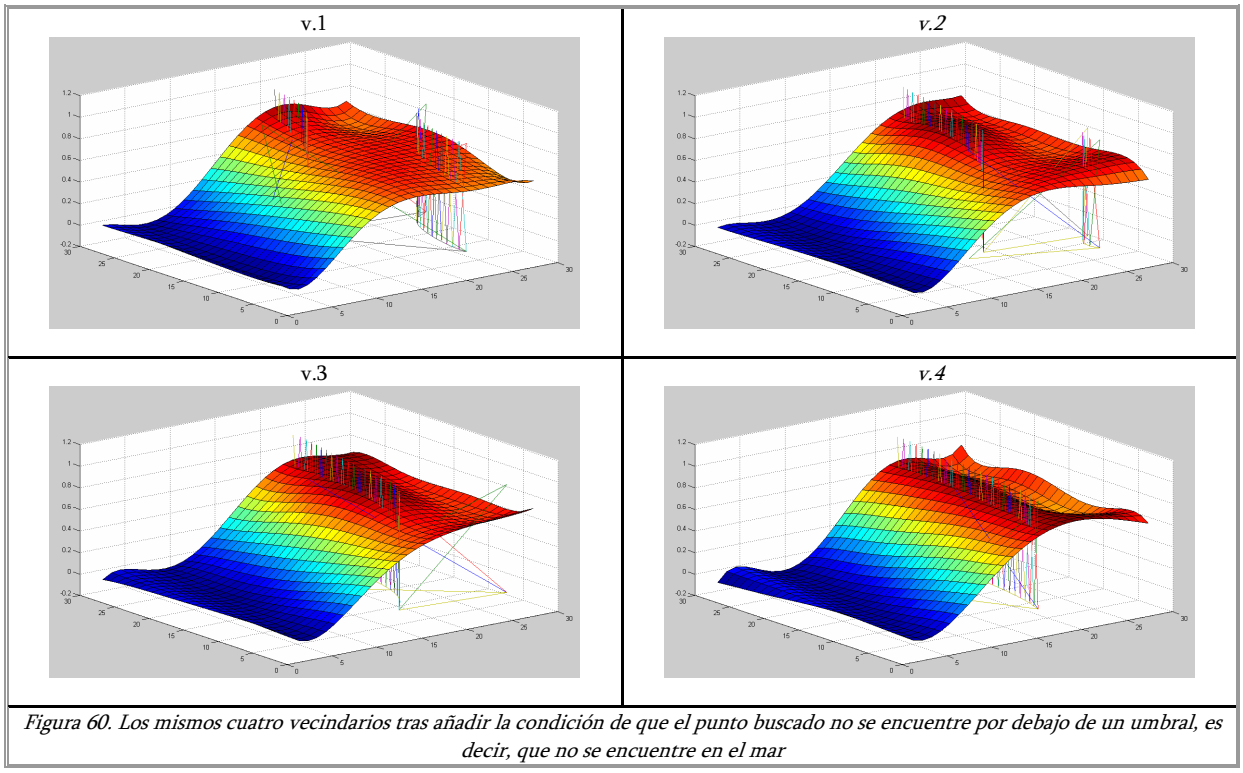
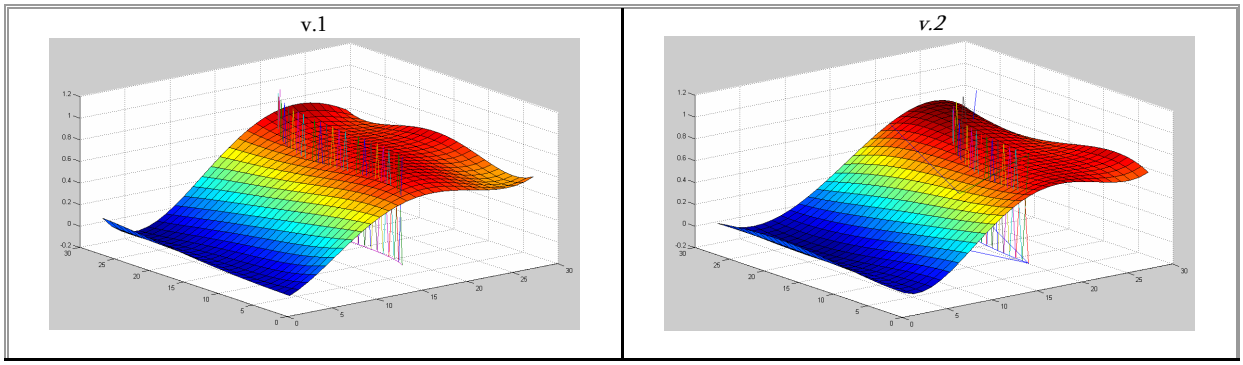
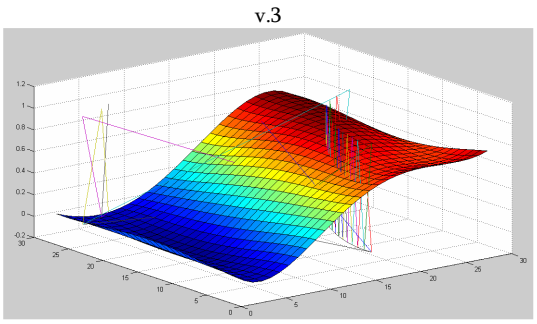


Figura 60. Los mismos cuatro vecindarios tras añadir la condición de que el punto buscado no se encuentre por debajo de un umbral, es decir, que no se encuentre en el mar

Como conclusión parcial hemos mejorado el resultado. Pero, habría de refinarse mejor el sistema de selección del punto puesto que en ocasiones se observa que el punto escogido está extremadamente lejano de la costa (por la condición de tener más cota). De todas formas, otra experimentación es posible: si bien, como decíamos, la tercera derivada de un perfil de orden 5 es de orden 2, la provinente de un perfil de orden 4 será de orden 1, será solución única. Comprobamos que, efectivamente, además de ser el grado mínimo para poder realizar esta operación, genera líneas continuas:





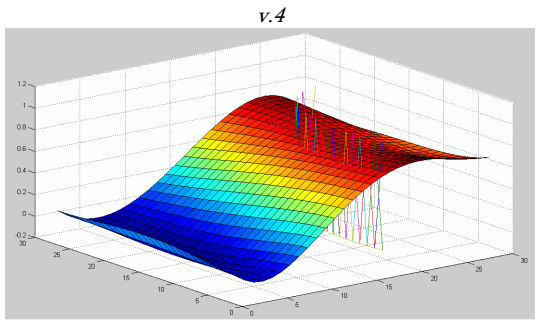


Figura 61. Los mismos cuatro vecindarios, en esta ocasión ajustados mediante una función rebajada un grado. Sigue generando problemas el establecimiento de condiciones de modo que se generan esos saltos visibles.

Se trata del mismo cálculo habiendo reducido el grado del polinomio a orden 4. Los problemas que se observan en la Figura 61 son derivados en primer lugar de la disminución de capacidad descriptiva del polinomio, y en segunda instancia, los movimientos quebrados revelan que la forma de trabajar por perfiles, incluso en la continuidad de un terreno matemático vuelve a presentar el problema de la independencia, no estamos aprovechando como es debido dicho vecindario y la continuidad zonal.

Para terminar de desechar este proceso (aún cuando pueda servir como inspiración a otros procesos), encontramos un error conceptual puesto que llegar a la tercera derivada de un perfil está haciéndonos perder la idea de laplaciano. Escribamos el proceso desglosado:

$$f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = cte \rightarrow f(y) \Rightarrow f_y(y) \Rightarrow f_{yy}(y) \Rightarrow f_{yyy}(y) = 0 \\ y = cte \rightarrow f(x) \Rightarrow f_x(x) \Rightarrow f_{xx}(x) \Rightarrow f_{xxx}(x) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Pensemos que para llegar a la triple derivada en *'y'* o en *'x'* se ignora la segunda derivada en *'y'* o *'x'* respectivamente en el proceso previo (segundas derivadas), estamos perdiendo el laplaciano, aquel que, precisamente, queremos evaluar; estamos olvidando con ello una condición de aprovechar el vecindario. Para solventar este problema conceptual llegamos a la siguiente sugerencia:

9.1.2 Obtención del máximo laplaciano por perfiles

Se trata de modificar lo menos posible la idea original, llegar a calcular el laplaciano, cuya línea rosa en la Figura 57 buscamos, y emplear los perfiles para encontrarlo. Ello modifica el proceso de cálculo:

$$f(x,y) \Rightarrow \nabla f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = cte \rightarrow \nabla f(y) \Rightarrow \nabla f_y(y) = 0 \\ y = cte \rightarrow \nabla f(x) \Rightarrow \nabla f_x(x) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Debemos ver en ello que la figura a la que vamos a realizar perfiles es a la del laplaciano. Sin embargo el problema de las soluciones múltiples y la independencia de perfiles siguen patentes:

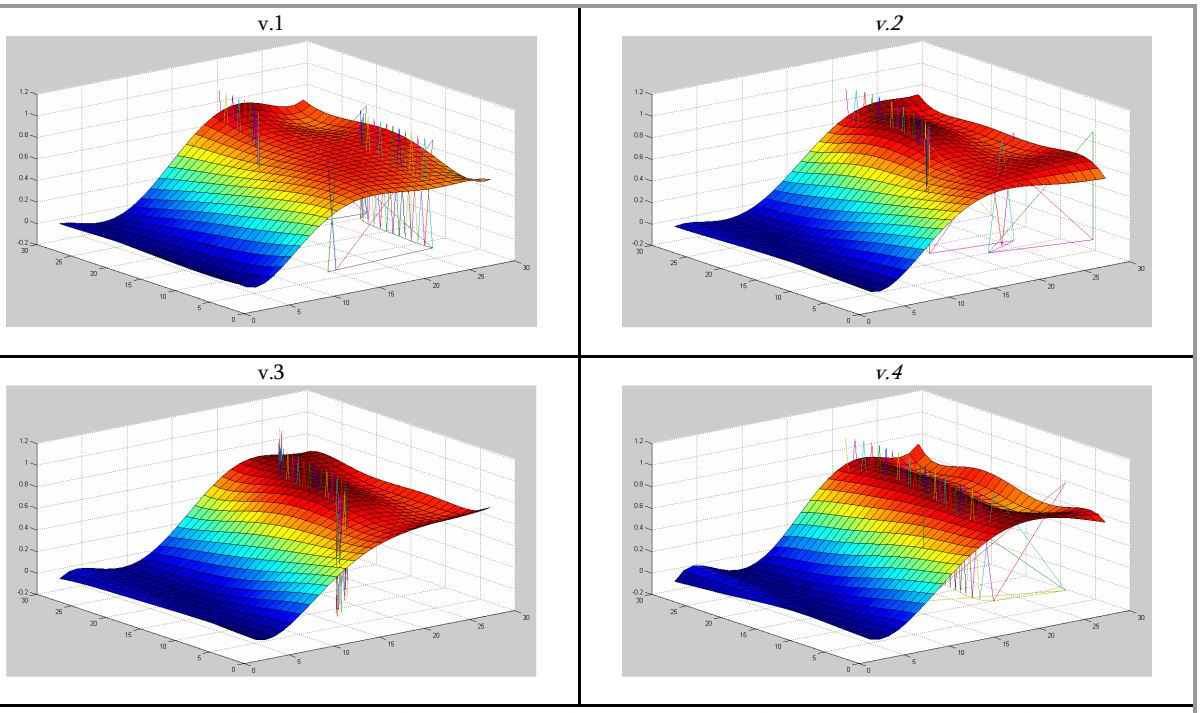
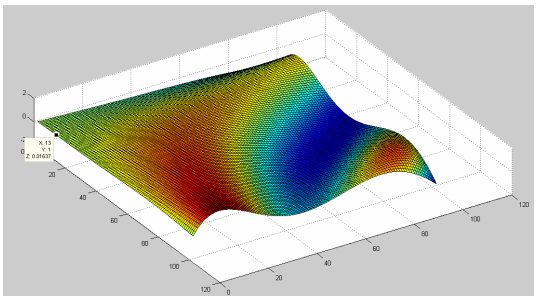
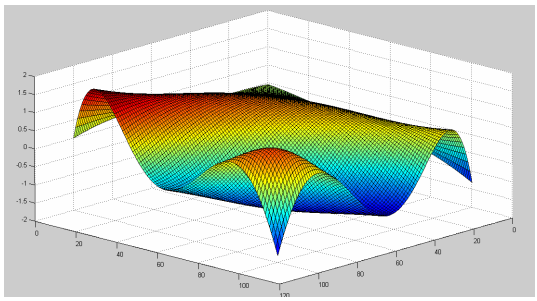


Figura 62. En esta ocasión los 4 mismo vecindarios en los que se ha buscado el punto de máxima curvatura estudiando cada perfil. Se observa menos errores y cierta continuidad, como es lógico, en la que sería la línea a extraer

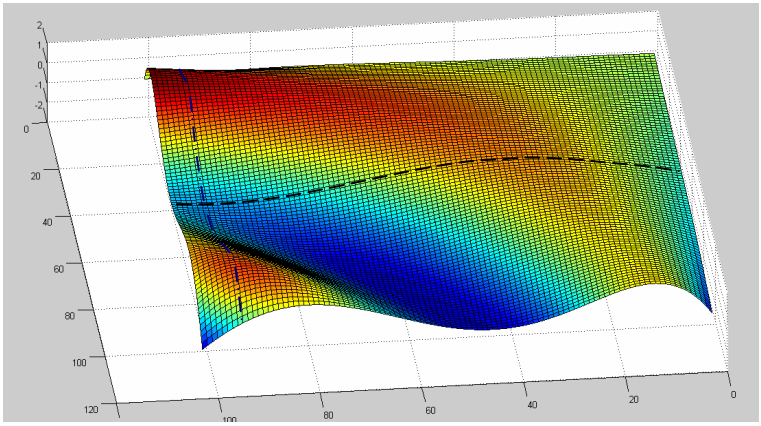
Además debemos hacer frente a otra peculiaridad del modo de cálculo. Presentamos a continuación una gráfica de la función $f(i,j)=1+\sin\left(\frac{(i*j)}{1000}\right)-\sin\left(\frac{i}{100}\right)-\cos\left(\frac{j}{100}\right)$:



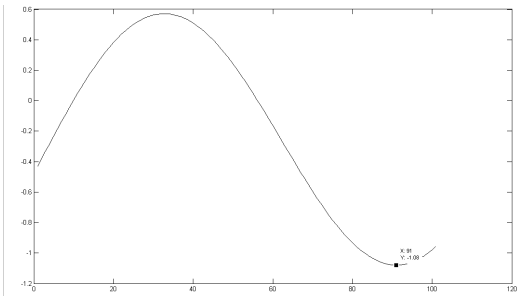
Tiene la características de parecer generar olas desde la esquina derecha



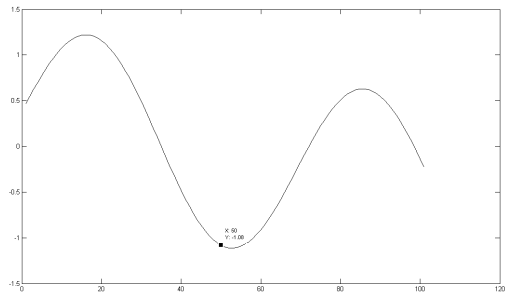
En la diagonal se observa una inclinación, no hay simetría en todas las direcciones.



Representación de los perfiles que a continuación se indican



Perfil i=50, se observa el punto mínimo a j=91. Valor=1.08



Perfil de j=91, Valor para (i=50) es 1.08, pero no es el mínimo de la curva, i=53

Figura 63. En esta función demostramos que extraer un máximo o un mínimo no equivale a estar extrayendo el valle de la función que, según hemos dicho es lo que buscamos obtener de la función laplaciana.

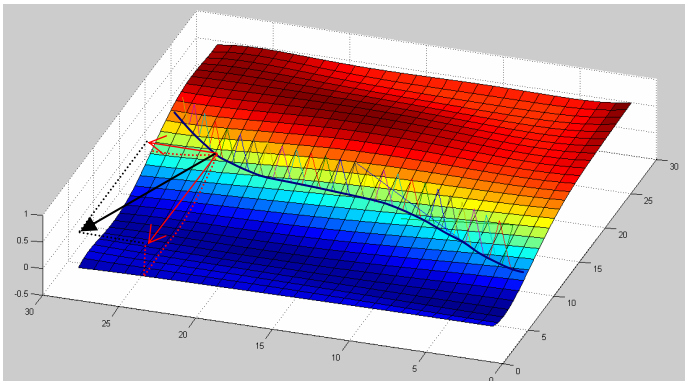
Lo que se trata de representar en la Figura 63 es simplemente el hecho de que, sabiendo que la línea recorre el valle, tomar perfiles y extraer el mínimo no aporta el verdadero punto de dicho valle en una superficie tridimensional. De la curva 3D representada, el perfil i=50 tiene su mínimo en el valor j=91, dibujando la respectiva curva de j=91 sería muy esperanzador encontrar el mínimo en i=50, pero aparece en i=53.

Aún con este contratiempo de procedimiento para encontrar la línea buscada, podemos ver un camino por el que avanzar. Aunque no hayan indicado ambos perfiles el mínimo exacto de esa zona de la curva, sí están cerca, y cabe hipotetizar que el error es generado por la independencia de cortar en las dos direcciones principales a una línea libre (nuestro valle de laplaciano buscado) y que, para encontrar exactamente su ubicación, habríamos de realizar un perfil perpendicular a su dirección. ***La nueva hipótesis es que, para mejorar el resultado, el perfil con que encontrar la línea correcta es aquel que corte perpendicularmente a la línea buscada.*** El problema radica en que si no se conoce la línea del valle de esa gráfica, no podemos dar un valor de perpendicular. Pero podemos aproximarnos bastante:

9.1.3 Máximo laplaciano direccional

Intentaremos aunar todos los problemas encontrados: Direccionalidad del corte con que encontrar el buen punto de máxima curvatura, conseguir unos criterios sólidos para extraer el punto si la solución fuere múltiple, asegurar con esos criterios tanta continuidad de la línea como fuere posible.

Vamos a considerarlo un proceso de refinamiento de la solución estándar descrita en el modelo superficial. En la próxima figura (Figura 64) presentamos visualmente el resultado dado por dicho modelo superficial, se observa así el conjunto de puntos que siguen la línea de anulación de la curvatura en el vecindario concreto. A partir de cada uno de ellos realizaremos la búsqueda de los nuevos puntos que definirán la máxima curvatura en la zona terrestre. Lo primero que hemos de solventar es la buena dirección para realizar el perfilado. Es cierto que no conocemos la línea de máxima curvatura buscada pero dado el tipo de curvas que estamos generando cabe esperar que sea sensiblemente paralela a la calculada hasta ahora. Podemos esperar que tomando perpendiculares a cada punto de la línea conocida tengamos perfiles más ajustados a las perpendiculares buscadas que aquellos dados por las direcciones principales tal y como hacíamos en el apartado anterior y, dado el remuestreo y la matemática, estaríamos dentro de la misma precisión subpíxel.



De la función, $f(x,y)$, la pendiente en las direcciones principales son las componentes del gradiente: $(f_x(x,y), f_y(x,y))$. A través de ellas y su módulo $\|\Delta f\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$, representados en rojo y negro respectivamente, podemos obtener la dirección de la pendiente en dicho punto, La perpendicularidad a la línea calculada

Figura 64. Criterio visual para la dirección del mejor perfil.

Por tanto, actuaríamos de forma que, dada la función del terreno matemático se calcularía las funciones respectivas de cada componente de gradiente y su módulo tal y como se indica en la Figura 64, ello permite obtener la expresión de la línea recta de la dirección encontrada. El conjunto de puntos del terreno matemático que estén en contenidos en el plano vertical de dicha dirección, definirán el perfil buscado.

Partimos de calcular las componentes del gradiente, que tomarán un valor para cada punto *(x,y)*:

$$f(x,y) \Rightarrow \Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Encontrar un perfil era, en apartados anteriores, la condición de $x = cte$ ó $y = cte$, sin embargo ahora es una regla de dependencia según una recta, $y = m \cdot x + b$ ó $x = m \cdot y + b$. Es la misma restricción puesto que sustituyendo en la expresión de $f(x,y)$ tendremos el perfil solo dependiente de una variable: $f(x)$ ó $f(y)$ respectivamente. Aprovechando el gradiente obtendremos la ecuación de la recta:

La pendiente de la recta $x = m \cdot y + b$ se obtiene porque 'x' e 'y' son conocidos por partir de puntos concretos:

$$m = \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \quad (17)$$

Y el término independiente:

$$b = x - m \cdot y$$

Con esta expresión podemos obtener el perfil tanto del terreno matemático como del laplaciano del mismo:

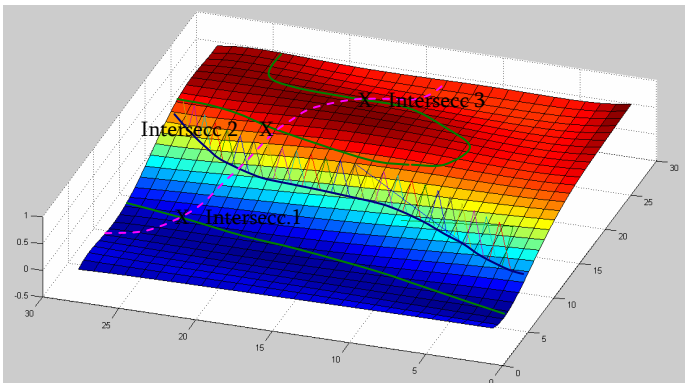
$$f(x,y) \Rightarrow x = m \cdot y + b \Rightarrow f(y)$$
$$\nabla f(x,y) \Rightarrow x = m \cdot y + b \Rightarrow \nabla f(y) \quad (18)$$

Nos encontramos en el punto en que podemos realizar cualquier perfil a ambas figuras de la Figura.29 en la dirección perpendicular a cada punto de la línea de anulación de la curvatura. Dado que buscamos la línea de valle (no olvidemos, que también podría ser de cresta) del laplaciano, trabajaremos con $\nabla f(y)$. Se trata simplemente de un perfil refinado, por lo que el procedimiento para encontrarle máximos y mínimos es el de siempre, derivarlo e igualar a 0.

Sin embargo cabe hacer notar algunas cuestiones respecto a ese $\nabla f(y)$. Se representa así todo un polinomio que lo describe. Se ha hablado ya de que en una función de orden 5 en dos variable genera para sus perfiles en direcciones principales polinomios de orden 5 en una sola variable. Sin embargo, en cualquier otra dirección puede alcanzar términos de orden 10. Por tanto, el laplaciano implica dos derivaciones, quedando los perfiles posibles en un orden máximo de 8 (ver anejos de análisis de curvas). Quiere decirse con ello que son perfiles complejos y de soluciones múltiples.

Pero este método ofrece una ventaja respecto a los descritos anteriormente. De las soluciones múltiples existentes en cada perfil ya no solo se tiene el criterio de tomar los puntos por encima o debajo de cierto umbral. Véase:

Si representamos junto a la línea de anulación de la curvatura (en azul) y un hipotético perfil (en rosa), los posibles resultados que pueden surgir con el nuevo método llevado a cabo serían la intersección con las líneas verdes (representación hipotética exagerando su lejanía a la cresta)

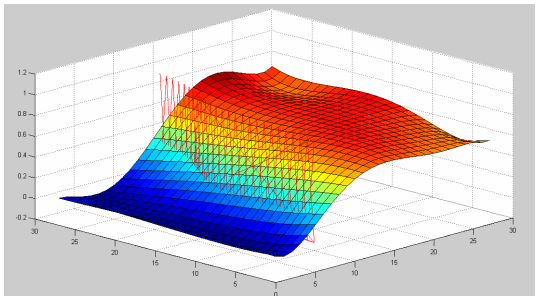


Anteriormente, los saltos en las líneas encontradas se debían a saltos por no encontrar condiciones adecuadas, de modo que en cada punto estarían encontrando una de las 3 intersecciones representadas (aunque entonces sólo eran perfiles en direcciones principales). Pero ahora tenemos la referencia de la línea azul. Por lo tanto como criterio de selección de la intersección correcta podremos indicar que sea aquella solución más próxima al punto de la línea azul que ha generado el perfil y a su vez tenga un valor en terreno matemático mayor que el mismo. Este criterio lleva automáticamente a la intersección 2.

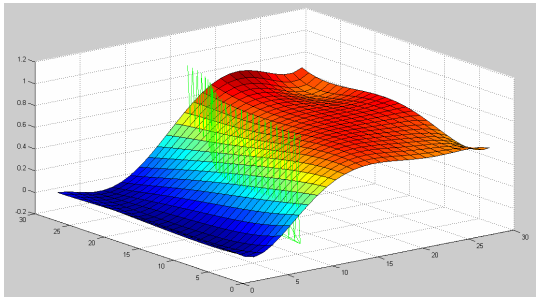
Figura 65. Representación de intersecciones buscadas

Como corresponde veamos con atención los resultados obtenidos en los mismos 4 modelos que se ha mostrado en los apartados anteriores. En este caso se muestra cada superficie 3 veces, en rojo la línea obtenida como anulación de la curvatura, la línea de inflexión, en verde tenemos la nueva línea calculada. La tercera figura muestra ambas líneas a la vez:

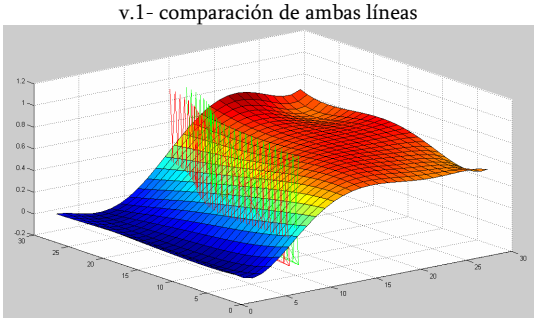
v.1-línea de inflexión



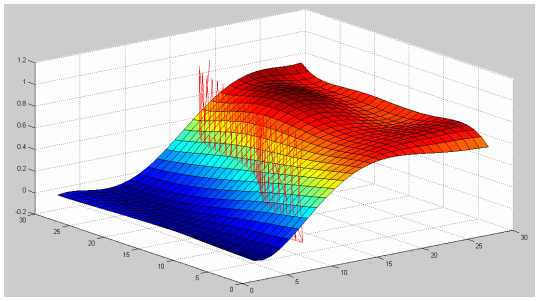
v.1-línea de máxima curvatura



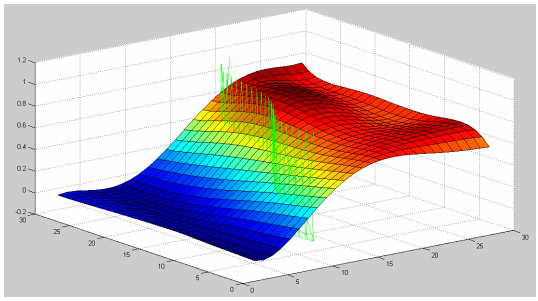
v.1- comparación de ambas líneas



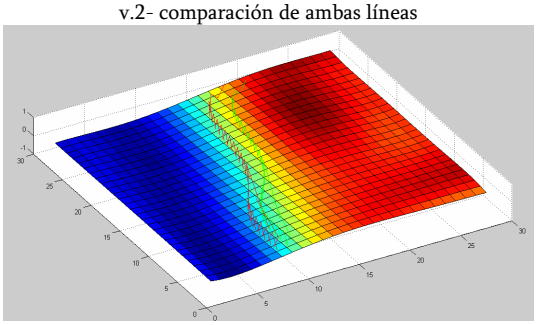
v.2-línea de inflexión



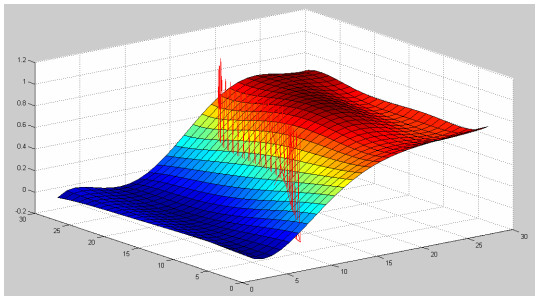
v.2 línea de máxima curvatura



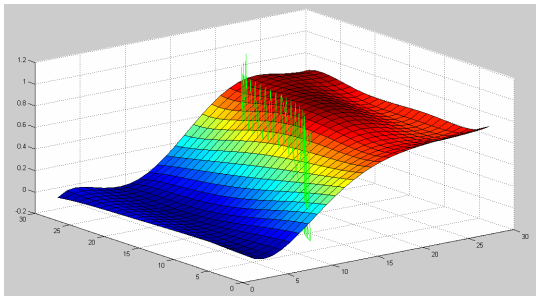
v.2- comparación de ambas líneas



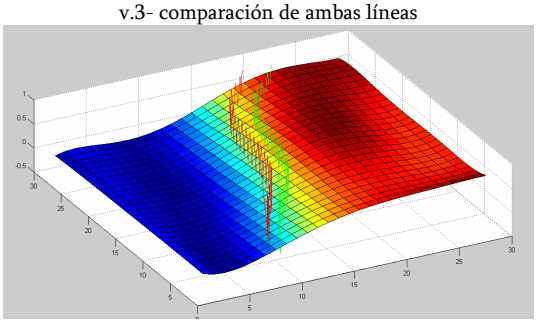
v.3- línea de inflexión



v.3- línea de máxima curvatura



v.3- comparación de ambas líneas



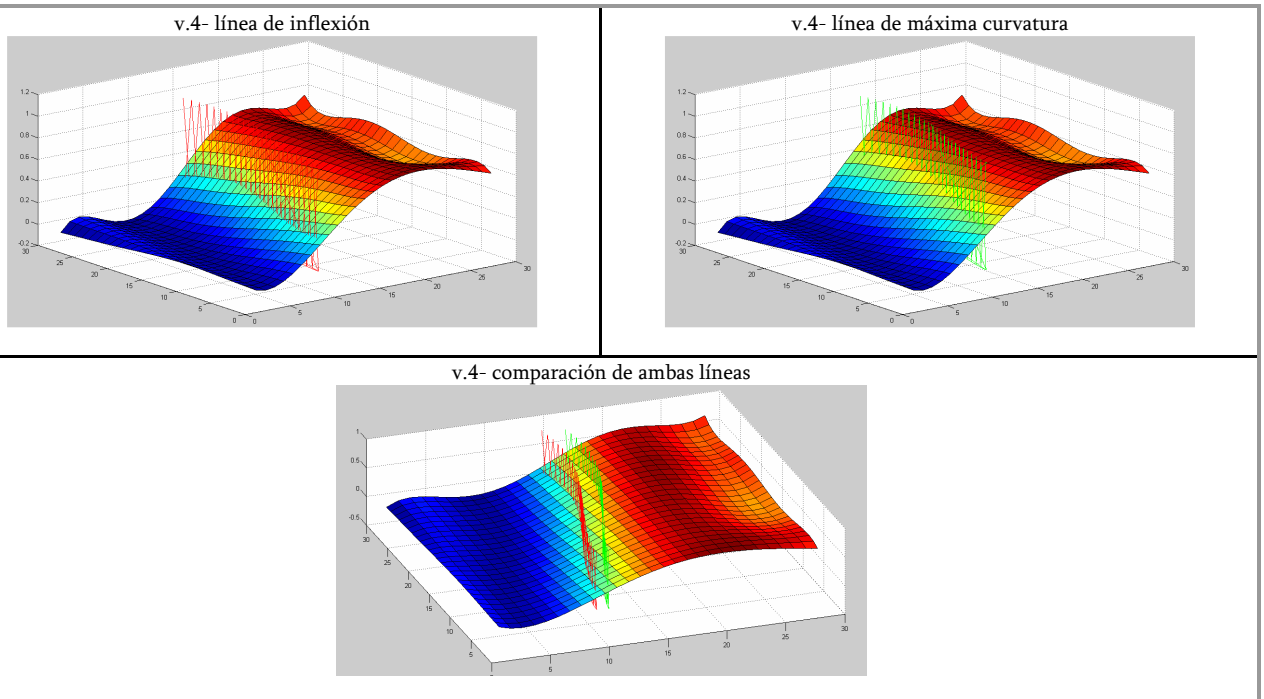


Figura 66. Los mismos 4 vecindarios mostrados en las pruebas anteriores, ahora con modelo de laplaciano direccional. Se muestra cada vecindario con la línea que la teoría original de inflexión facilita, la actualmente obtenida y la comparación entre ambas. Es posible que este nuevo tratamiento corrija el sistematismo de alejamiento que la línea de inflexión demostró en los resultados.

Cuestiones a resaltar. Parece que con este último método hemos encontrado una forma correcta de aproximar la línea de máxima curvatura anterior a la caída a la zona marina (si trabajáramos con la imagen en componentes principales algunos criterio cambiarían pues parece una imagen en negativo de la de infrarrojos y aquello que es alto o bajo como nivel digital en el terreno original se convierte en lo contrario). La ***continuidad*** de la línea verde permite aceptar la aproximación por perfiles ofreciendo un resultado aceptable y coherente. A su vez queda patente la proximidad a la línea de inflexión pero no su coincidencia así como la posibilidad de ver con claridad que ***la condición de maximización de la curvatura no coincide con la cresta del terreno*** original. Por lo pronto, ***la nueva interpretación de la línea y su ubicación matemática dan un buen resultado visual***.

9.2 Aplicación de curvas tipo spline

Otra sugerencia que cabe tener presente para la obtención de la correcta línea de costa consiste en modificar el tratamiento por el que se dibuja tal línea definitiva. Recordemos que los problemas que se pretende solventar se resumen en dos:

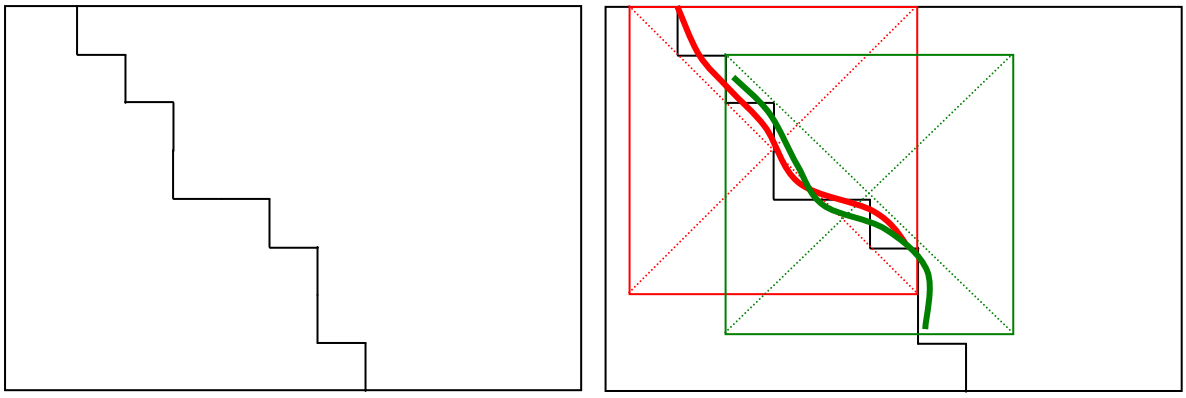
-Aplicación de una hipótesis de ubicación de la línea de costa.

-Que el resultado contenga una influencia zonal. En este objetivo se solventa implícitamente el problema de la independencia de ciertos perfiles (ver '*modelo de perfiles*') y facilita el dibujo de la línea definitiva.

La sugerencia en este apartado se centra en este segundo aspecto, en la forma de extraer la línea y se trace de forma lógica y correctamente suavizada. Para obtener un aumento de puntos de línea por cada píxel de entrada recurríamos al remuestreo. La sugerencia consiste en independizar los puntos de salida y la operación propia del remuestreo; que un factor de multiplicación de 2 no impida extraer 4 puntos por píxel

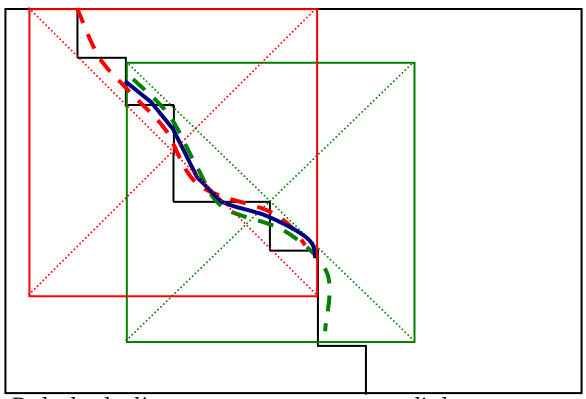
original, o bien, en sentido contrario, que recurrir a un factor de 8 no obligue a extraer ese mismo número puntos.

Lo primero que se cambiaría sería el número de puntos a extraer desde cada vecindario. Si pensamos que en el cálculo de cada punto ya se ha tenido en cuenta su vecindario podemos considerar que hay suficiente influencia zonal. Solo extraeríamos un punto por cada uno de la línea aproximada. Al extraer un solo punto, no se extraerían puntos que invadieran a los vecinos. Esta combinación de permitir que el vecindario aporte influencia zonal y no extraer puntos que invadan a los vecinos (lo que en el proceso original obliga a la última labor de promediado como se observa en el '*modelo superficial*', en concreto ver Figura.25) es el punto de partida. A partir de ello querremos que se dibuje una buena curva, la idea es encontrar el correcto lugar geométrico de los puntos que dibujan esa curva en la imagen a partir de aquellos que hayamos extraído. Para ello es para lo que sugerimos en primer lugar las curvas de tipo spline, aunque cabría realizar un estudio de opciones de interpolación: Bezier, splines, B_splines, polinomio de Hernite, polinomios de Tschebychev.



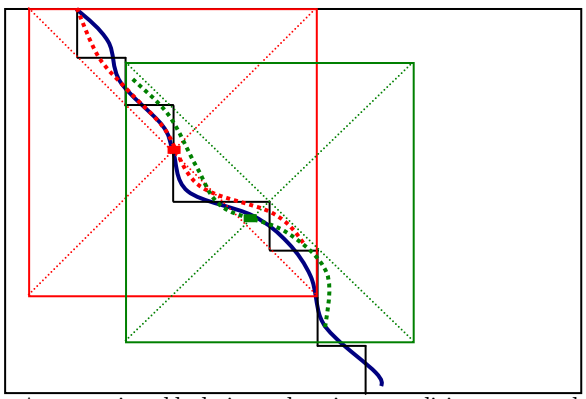
Tomado el vecindario se evaluaría el laplaciano, representado mediante línea en el color correspondiente de cada vecindario

Proceso antiguo



Dadas las dos líneas, se encuentra una promediada puesto que cada píxel invade y es invadido por los vecinos. Así se obtiene la línea azul.

Camino propuesto



Aunque existe el laplaciano y las mismas condiciones que en el proceso anterior, solo se extraería un punto por vecindario, considerándolo correcto per sé. Para extraer más puntos se propone que se busque expresiones que describan su recorrido intermedio

Figura 67. explicación gráfica de empleo de curvas spline

9.3 Ampliación de la teoría de ASM

Se trata de extender la teoría de autovectores aplicada para las Componente Principales y Active Shape Models (ver anejo 'Teoría Active Shape models', pg 97) para encontrar una buena curva en cada vecindario. Podría parecer demasiada tarea para el objetivo buscado, pero la apertura de mente que requiere tal vez pueda ser de ayuda en el futuro.

Aquello a lo que se busca dar solución es a encontrar la correcta figura que describa la costa. El principal problema es que en ocasiones, el ajuste matemático describe una curva que no ayuda a encontrar bien el punto de inflexión. Si lo vemos en perfiles:

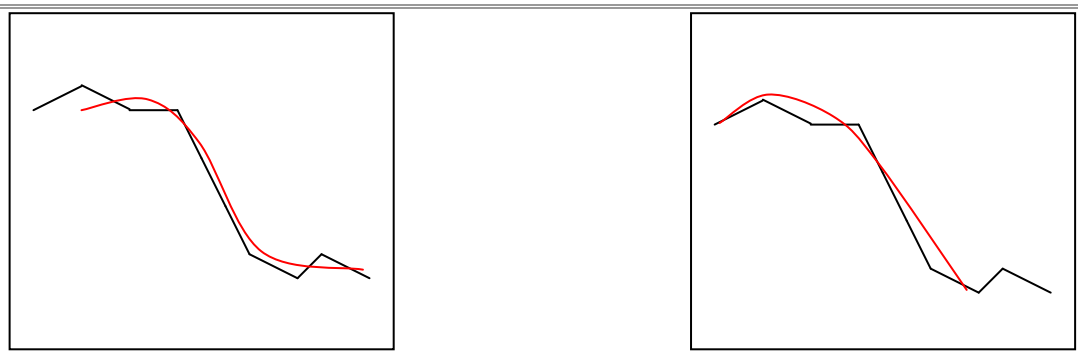
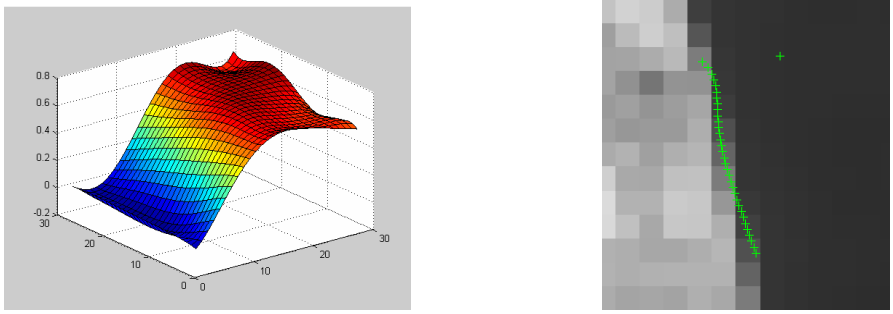


Figura 68. ejemplo de curva en la que la detección del punto de inflexión sería imposible aunque el algoritmo esté bien programado

El problema consiste en que aunque nos encontremos en la zona en que se encuentra la línea de costa, puede que algún perfil no describe una buena curva. Véase que en el primer ejemplo, la curva se adapta a tierra y mar y podemos extraer un buen punto de inflexión. Sin embargo, en la segunda figura, el perfil comienza demasiado a la izquierda de modo que, aunque hay buena adaptación, no recupera la horizontalidad en el mar y no se crea el punto de inflexión que buscamos. Esto genera ocasionalmente los puntos escapados:



El último perfil de este vecindario no llega a curvarse para recuperar la horizontalidad del mar, como consecuencia, no existe ahí un punto de inflexión, siguiendo los criterios programados se llega a dar un punto incorrecto, como aparece en la segunda imageb

Figura 69. Problema de localización

Como el proceso programado recorre varias veces una misma zona y además está sujeto a unos pesos a la hora de realizar el promedio, esos puntos escapados no tienen prácticamente ningún efecto.

Sin embargo, la inmensa mayoría de los vecindarios no incluyen ese error, lo cual debería ser aprovechable en el nuevo modelo. Lo que se pretende es aportar un modelo de comportamiento, sin intención clara de que sustituya al modelo matemático o que sirva de filtro. Pero quedando plasmada, es posible que abra algún camino.

La cuestión es que, teniendo toda una colección de vecindarios, bien en su forma original o en su representante modelo matemático, se puede obtener unos parámetros de variación. Se tiene la siguiente formulación matemática:

$$\text{Siendo } x_{pto,vecindario}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & & x_{1,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$X_{media=}\begin{pmatrix} \overline{x}_{vecind1} & \overline{x}_{vecind2} & \cdots & \overline{x}_{vecind'p'} \end{pmatrix}$$

$$X_{desviaciones=}\begin{pmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{x2} & \cdots & \sigma_{xp} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$VarCov = \sigma_{'p'x'p'}$$

$$\Downarrow$$

$$p \text{ autovectores, } p \text{ dimensionales}$$

(19)

Es como el análisis de componentes principales pero en vez de bandas se tendrá vecindarios. Con gran cantidad de vecindarios pretendemos cifrar su capacidad de variar. No es raro tener más de 300 vecindarios. Si el vecindario es para una imagen de resolución 28.8, un vecindario 3x3 remuestrado a factor cuatro, se tiene 244 puntos. Sin embargo, no existe tanta variedad, el vecindario medio incluirá en sí el desfase tierra-mar aproximadamente o, si no fuera así, es previsible que la capacidad de variación de esos 244 puntos esté en los primeros autovectores.

Supongamos que a partir de un vecindario dado averiguamos la influencia de cada autovector (análogamente a lo presentado en anejos). Sería posible que hayamos averiguado que cuando el peso de algún/os autovector/es sobrepasa un valor el tipo de figura nos genere el error descrito arriba. Así, sería posible decidir que ese vecindario al haber sobrepasado ese peso sea sustituido por el más próximo que no lo sobrepase, se habrá evitado que el vecindario genere el temido error.

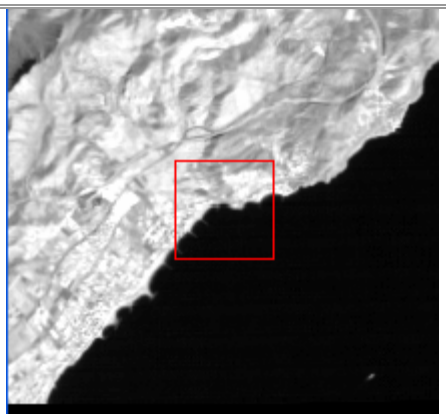
La idea puede resultar un tanto complicada, y sin una visión útil directa, pero siendo un proyecto teórico son estas sugerencias las que cabe mostrar.

10 . ANEJOS

10.1Pruebas sobre el ratio entre bandas

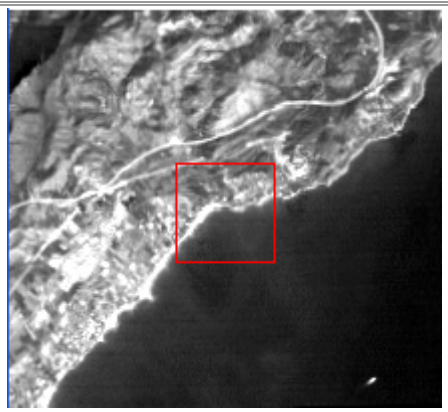
Como se dijo, cierto artículo [5], indicaba como posibilidad para detectar el mar las divisiones banda4/banda2 o bien banda5/banda2. Finalmente no se empleó este método para la binarización de la imagen por lo que este anejo es más una compilación para un posible interés futuro que un fin real para el proyecto.

El ratio más efectivo de los dos propuestos es b4/b2.



Banda4 IR

Band	Min	Max	Mean	Stdev
1	0	163	56.581076	39.610489

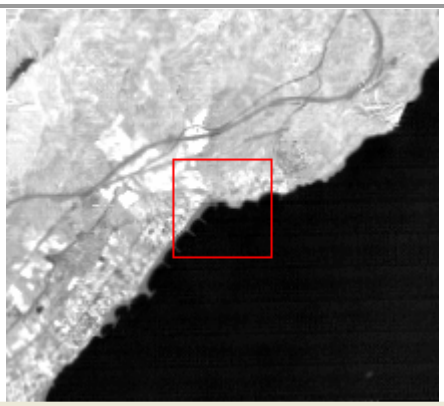


Banda2 G

Band	Min	Max	Mean	Stdev
1	0	161	56.065174	18.309790

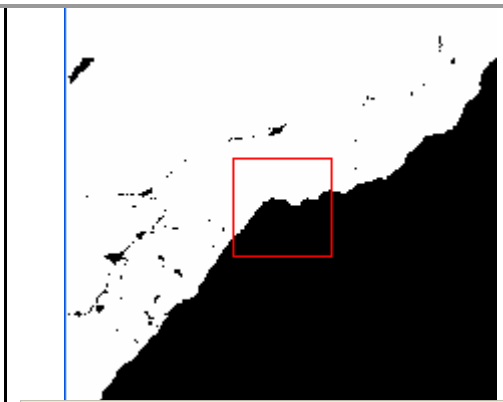
Figura 70. Bandas provinentes de LandSat

Cuando realizamos el ratio sugerido observamos que existe cierta peculiaridad. No obtenemos el mismo resultado en la división dividiendo las bandas en punto flotante o en enteros, el formato propio original con que nos llegan las imágenes.



Min	Max	Mean	Stdev
0.000000	3.395833	0.889115	0.526899

División en punto flotante



Band	Min	Max	Mean	Stdev
1	0	3	0.551701	0.501055

División en enteros

Figura 71. Detalle del resultado que produce la aplicación de ratios entre bandas a las imágenes LandSat

Tal peculiaridad no era notificada en el artículo de donde se ha tomado la idea. Nos queda pensar que para dar esa información tal artículo tenga una batería de suficientes pruebas para poder generalizar a todas las imágenes LandSat.

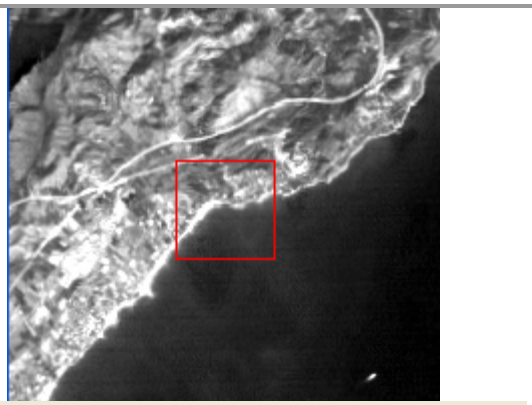
De todos modos, condicionar el resultado de un ratio al hecho de que se realice la división en formato flotante o entero resulta un tanto ilógico. Sin embargo, la propiedad que se pretende destacar debe seguir patente en las imágenes calculadas en punto flotante. Se realizó pruebas para obtener una operación matemática que destacara la interfaz tierra-mar. Partimos de dudas referentes a la corrección radiométrica de las bandas; dicho de otro modo, es posible que visualicemos correctamente la imagen porque los niveles digitales de los píxeles de la imagen entre sí sean correctos, pero haya algún sistematismo erróneo en la imagen a nivel numérico que influya en el resultado del ratio. Como solución a ello se piensa en cómo tener un criterio de homogeneización.

Como primera idea probaremos a corregir radiométricamente una banda respecto a la otra mediante una transformación lineal de media y varianza.

Dado que la banda del infrarrojo presenta mayor varianza se realizará la transformación a la banda 2.

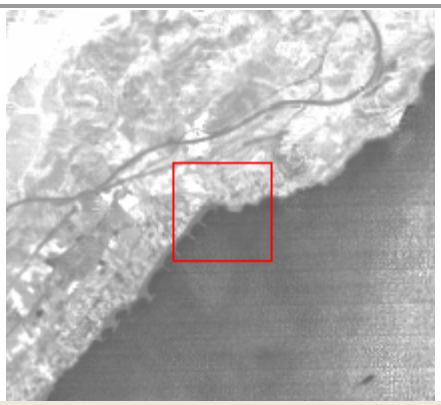
$$g(x,y)=\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)\cdot f(x,y)+\left[\mu_g-\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)\cdot\mu_f\right]$$

$$g(x,y)=\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot banda2+\left[56.58-\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot 56.065\right]$$



Min	Max	Mean	Stdev
-65.374290	284.837799	56.580387	39.828013

Banda2 corregida



Min	Max	Mean	Stdev
-102.233604	5.345375	0.885112	1.019406

División

Figura 72. Realización del ratio con la banda2 corregida

No se obtiene una mejora, pero es el camino seguido para los hechos siguiente. Se puede captar la idea de que lo que pretende destacar el ratio mencionado es una disparidad entre ambas bandas. Por ello se deduce que lo que el artículo espera es destacar, por altos, los valores de la zona terrestre en el IR frente a una absorción mayor en el verde, y destacar a su vez que el IR es más absorbido en el mar; el ratio entre bandas es la respuesta a esa lógica. Matemáticamente podemos "ayudar" a esta distinción a través de la expresión recién empleada de corrección. Los resultados son visualmente llamativos.

En verdad no se probó más expresiones pues este estudio fue un breve camino de pruebas que se decidió descartar. Las modificaciones son simples, se trata de multiplicar el valor de la media de la imagen de destino por determinado factor. En verdad se trata solo de una traslación de los valores digitales, ahora bien, se comprobó que los efectos en el ratio no eran lineales. De todas formas, en la tabla siguiente se muestra la expresión matemática y el ratio resultante.

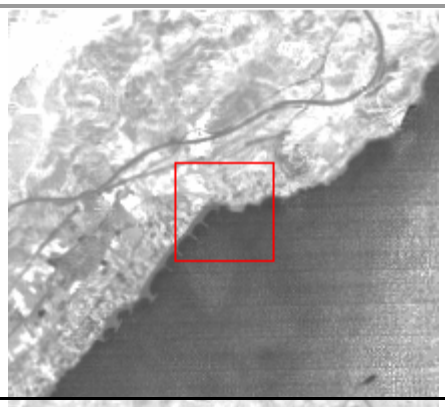
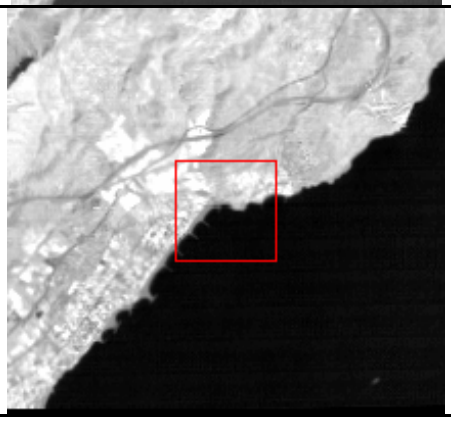
$g(x,y)=\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot banda2+\left[56.58-\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot 56.065\right]$	
$g(x,y)=\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot banda2+\left[56.58*\text{^}2-\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot 56.065\right]$	
$g(x,y)=\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot banda2+\left[56.58*3-\left(\frac{39.61}{18.209}\right)\cdot 56.065\right]$	
Expresión de transformación para el verde	Ratio IR/verde

Figura 73. Resultados de ratios tras modificar la transformación

El resultado es visual como posibilidad de futuras reflexiones pero resultaba ilógico explotar estas posibilidades en IRS por la falta de resolución en su banda4. Se descartó esta vía como posible umbralización aunque se descubriera una forma de ahondar la diferencia visual tierra-mar en LandSat.

10.2 Análisis de los polinomios

El objetivo de este apartado es dar una visión más concreta sobre polinomios. Se procura aquí aprender a pensar en los polinomios de forma más intuitiva, dado que a la hora de trabajar, se supera la formulación en pro de ser capaz de imaginar un polinomio y sus capacidades, descubrir según la forma del polinomio qué va a ser capaz de modelar.

10.2.1 Interpretación polinómica

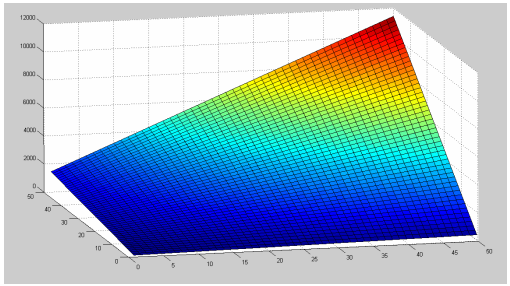
Así pues puede ser interesante hacer un planteamiento intuitivo. Una función de dos variables genera valores dependientes de ellas lo cual quiere decir, en nuestro caso, que, dependiendo de sus coordenadas *x* e *y,* se tiene un valor de altitud *z*. Según el grado que adquiera el polinomio escogido esa superficie *tiene a su disposición un número limitado de curvaturas*, es decir, si escogemos una función solo de grado 1 $[z(x,y)=a_0+a_1\cdot x+a_3\cdot y]$ equivale a escoger un plano, por muchas curvas que tenga el vecindario escogido, nuestra superficie no podrá curvarse como el terreno, obtendrá el plano que mejor se ajuste, pero no dejará de ser un plano. Pero juguemos un poco más para ir creando la visión intuitiva de cómo funcionan los polinomios, aún queda un término de *x* e *y*: si añadimos un término más $[z(x,y)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot y+a_3\cdot x\cdot y]$ habrá cierta curva pero obsérvese que en las direcciones de x e y solo obtendremos rectas:

Si damos valores concretos a x o y:

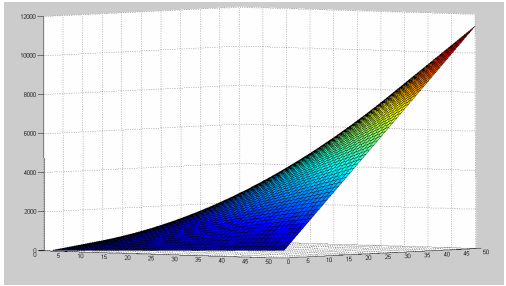
$z(x,y)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot y+a_3\cdot x\cdot y$ $\qquad$ $z(x,y)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot y+a_3\cdot x\cdot y$

$x\to cte$ $\qquad$ $y\to cte$

$z(y)=y\cdot(a_2+a_3\cdot x\cdot)+(a_0+a_1\cdot x)$ $\qquad$ $z(x)=x\cdot(a_1+a_3\cdot y)+(a_0+a_2\cdot x)$



Observar que cada perfil en x o y es una línea recta

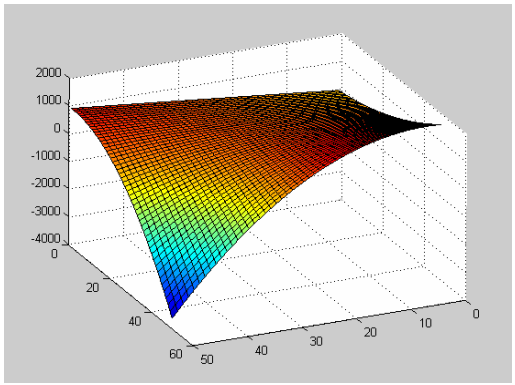


La superficie tiene cierta curva en diagonal, pero solo una curvatura

Figura 74. Superficie dada por $z(x,y)=1+25\cdot x+3\cdot y+4\cdot x\cdot y$

Sigue sin poder describir las curvas que necesitamos. Por ello debemos pensar que el grado del polinomio nos dice también cuantas veces podrá curvarse y para qué casos nos podrá ser útil.

Hagamos la misma labor con una función de segundo grado por variable:



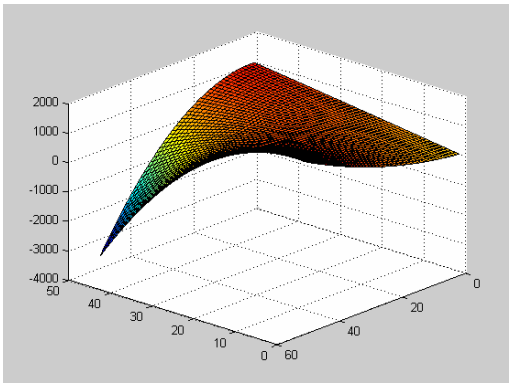


Figura 75. Superficie dada por

$$z(x,y) = 1 + 10 \cdot x + 20 \cdot y - 0.04 \cdot x \cdot y + 0.5 \cdot x^2 - 0.01 \cdot y^2 - 0.001 \cdot x^2 \cdot y^2$$

Observemos que cada perfil dibuja un fragmento de parábola mientras que, de nuevo, la diagonal puede tomar más curvaturas. Esta idea visual es la que debemos tener presente para encontrar la función que represente nuestro terreno.

Si tomamos la función con dos variables, análogamente a lo anterior, hasta grado 3 con todos los términos, cada perfil podrá describir una función igual que aquella que se empleaba en la teoría de perfiles original, es decir, cada perfil *x=cte* o *y=cte* seguirá una curva del tipo: $z = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ (donde x puede ser tanto x como y, y los parámetros a, b,c, y d, dependerán de y o x respectivamente y de los parámetros de la curva 3D). Pero hay una conclusión aún mayor: ***aunque no se haya optado por una función de este orden, no cabe olvidar que, si así hubiera sido, la forma de obtención del punto de inflexión sería directa pues, llegando a la expresión anterior, el proceso es sencillamente el mismo que en el modelo matemático de perfiles*** (aunque es posible que tuviéramos el mismo problema planteado en el caso de máximo laplaciano direccional por el que el punto encontrado por cada perfil no coinciden)**.**

El grado del polinomio está en relación directa con el vecindario y el factor de multiplicación. Un polinomio requiere un número de ecuaciones determinado para poder resolverse, el vecindario implica número de ecuaciones, así como el remuestreo. Según el vecindario y el remuestreo, podemos asumir un grado de polinomio.

10.2.2 Estudio analítico de los polinomios

Intentemos aclarar diversas dudas: ¿Qué polinomio se ajusta mejor a nuestro vecindario? ¿Podemos generalizar un solo modelo de polinomio a todos los posibles modelos de vecindario? Y, dado que el polinomio aporta un valor dependiente de las coordenadas '*x*' e '*y*' ¿influye el origen de coordenadas?

Para ello probemos con 3 modelos de polinomio básicos; de orden 3, 4 y 5 (es decir, todas las posibilidades hasta que cada variable alcance exponente 3, 4 o 5 respectivamente):

Polinomio hasta grado 3	
$f(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3$	(20)

Polinomio hasta grado 4

$$f(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + \\ + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3 + a_{17} \cdot x^4 + \\ + a_{18} \cdot y^4 + a_{19} \cdot x^4 \cdot y + a_{20} \cdot x^4 \cdot y^2 + a_{21} \cdot x^4 \cdot y^3 + a_{22} \cdot x^4 \cdot y^4 + a_{23} \cdot x^3 \cdot y^4 + a_{24} \cdot x^2 \cdot y^4 + \\ + a_{25} \cdot x \cdot y^4$$

(21)

Polinomio hasta grado 5

$$f(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + \\ + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + \\ + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3 + a_{17} \cdot x^4 + a_{18} \cdot y^4 + a_{19} \cdot x^4 \cdot y + a_{20} \cdot x^4 \cdot y^2 + a_{21} \cdot x^4 \cdot y^3 + \\ + a_{22} \cdot x^4 \cdot y^4 + a_{23} \cdot x^3 \cdot y^4 + a_{24} \cdot x^2 \cdot y^4 + a_{25} \cdot x \cdot y^4 + a_{26} \cdot x^5 + a_{27} \cdot y^5 + a_{28} \cdot x \cdot y^5 + \\ + a_{29} \cdot x^2 \cdot y^5 + a_{30} \cdot x^3 \cdot y^5 + a_{31} \cdot x^4 \cdot y^5 + a_{32} \cdot x^5 \cdot y^5 + a_{33} \cdot x^5 \cdot y^4 + a_{34} \cdot x^5 \cdot y^3 + \\ + a_{35} \cdot x^5 \cdot y^2 + a_{36} \cdot x^5 \cdot y$$

(22)

Respecto al origen de coordenadas hay dos aspectos: la estabilidad numérica si las coordenadas toman valores extremadamente grandes, y la duda de saber si el origen de coordenadas tomado afecta a la información aportada para el terreno matemático. Para la primera duda nos quedamos medianamente tranquilos desde el momento las coordenadas no han sido causa de problemas numéricos (aunque es un campo a comprobar e investigar). Respecto a la segunda se puede plantear la duda a la inversa, si añadimos los términos al polinomio que vendrían dados desde otro origen, y esa información aportara algo no dado por el origen original, el rango se mantendría completo. Por el contrario, si el rango de la matriz no varía es que el origen de coordenadas no consigue aportar más información. Veamos las expresiones y así hacernos una idea más clara;

Polinomio simétrico hasta grado 3

$$f(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + \\ + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3 + \\ a_{17} \cdot (fl - x) + a_{18} \cdot (cl - y) + a_{19} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y) + a_{20} \cdot (fl - x)^2 + a_{21} \cdot (cl - y)^2 + \\ + a_{22} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y) + a_{23} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^2 + a_{24} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^2 + a_{25} \cdot (fl - x)^3 + \\ + a_{26} \cdot (cl - y)^3 + a_{27} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y) + a_{28} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^2 + a_{29} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^3 + \\ + a_{30} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^3 + a_{31} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^3$$

(23)

Polinomio simétrico hasta grado 4

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + \\
& + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + \\
& + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3 + a_{17} \cdot x^4 + a_{18} \cdot y^4 + a_{19} \cdot x^4 \cdot y + a_{20} \cdot x^4 \cdot y^2 + a_{21} \cdot x^4 \cdot y^3 + \\
& + a_{22} \cdot x^4 \cdot y^4 + a_{23} \cdot x^3 \cdot y^4 + a_{24} \cdot x^2 \cdot y^4 + a_{25} \cdot x \cdot y^4 + a_{26} \cdot (fl - x) + a_{27} \cdot (cl - y) + \\
& + a_{28} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y) + a_{29} \cdot (fl - x)^2 + a_{30} \cdot (cl - y)^2 + a_{31} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y) + \\
& + a_{32} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^2 + a_{33} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^2 + a_{34} \cdot (fl - x)^3 + a_{35} \cdot (cl - y)^3 + \\
& + a_{36} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y) + a_{37} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^2 + a_{38} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^3 + \\
& + a_{39} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^3 + a_{40} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^3 + a_{41} \cdot (fl - x)^4 + a_{42} \cdot (cl - y)^4 + \\
& + a_{43} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y) + a_{44} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y)^2 + a_{45} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y)^3 + \\
& + a_{46} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y)^4 + a_{47} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^4 + a_{48} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^4 + \\
& + a_{49} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^4
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Polinomio simétrico hasta grado 5

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + \\
& + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3 + a_{17} \cdot x^4 + \\
& + a_{18} \cdot y^4 + a_{19} \cdot x^4 \cdot y + a_{20} \cdot x^4 \cdot y^2 + a_{21} \cdot x^4 \cdot y^3 + a_{22} \cdot x^4 \cdot y^4 + a_{23} \cdot x^3 \cdot y^4 + a_{24} \cdot x^2 \cdot y^4 + \\
& + a_{25} \cdot x \cdot y^4 + a_{26} \cdot x^5 + a_{27} \cdot y^5 + a_{28} \cdot x \cdot y^5 + a_{29} \cdot x^2 \cdot y^5 + a_{30} \cdot x^3 \cdot y^5 + a_{31} \cdot x^4 \cdot y^5 + \\
& + a_{32} \cdot x^5 \cdot y^5 + a_{33} \cdot x^5 \cdot y^4 + a_{34} \cdot x^5 \cdot y^3 + a_{35} \cdot x^5 \cdot y^2 + a_{36} \cdot x^5 \cdot y + \\
& + a_{37} \cdot (fl - x) + a_{38} \cdot (cl - y) + a_{39} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y) + a_{40} \cdot (fl - x)^2 + a_{41} \cdot (cl - y)^2 + \\
& + a_{42} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y) + a_{43} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^2 + a_{44} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^2 + \\
& + a_{45} \cdot (fl - x)^3 + a_{46} \cdot (cl - y)^3 + a_{47} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y) + a_{48} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^2 + \\
& + a_{49} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^3 + a_{50} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^3 + a_{51} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^3 + \\
& + a_{52} \cdot (fl - x)^4 + a_{53} \cdot (cl - y)^4 + a_{54} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y) + a_{55} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y)^2 + \\
& + a_{56} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y)^3 + a_{57} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y)^4 + a_{58} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^4 + \\
& + a_{59} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^4 + a_{60} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^4 + a_{61} \cdot (fl - x)^5 + a_{62} \cdot (cl - y)^5 + \\
& + a_{63} \cdot (fl - x) \cdot (cl - y)^5 + a_{64} \cdot (fl - x)^2 \cdot (cl - y)^5 + a_{65} \cdot (fl - x)^3 \cdot (cl - y)^5 + \\
& + a_{66} \cdot (fl - x)^4 \cdot (cl - y)^5 + a_{67} \cdot (fl - x)^5 \cdot (cl - y)^5 + a_{68} \cdot (fl - x)^5 \cdot (cl - y)^4 + \\
& + a_{69} \cdot (fl - x)^5 \cdot (cl - y)^3 + a_{70} \cdot (fl - x)^5 \cdot (cl - y)^2 + a_{71} \cdot (fl - x)^5 \cdot (cl - y)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Donde *fl* y *cl* se refiere a las filas y las columnas del vecindario. Observar que *(cl-y)* y *(fl-x)* hace que los términos añadidos a cada polinomio sea el mismo polinomio en cada caso pero aportando los números que habrían surgido de haber comenzado en la esquina opuesta. Repitamos, si la información desde tal esquina aporta algo que no se

podía percibir numéricamente desde la esquina original, o bien si no aporta nada, será deducible de los ajustes respectivos.

No obstante veamos que las matrices para generar el terreno matemático con los tres últimos modelos, por mucho que algún término añada información al polinomio originario, va a presentar defecto de rango. ¿Qué significa eso?, la imposibilidad de resolver dado que no se puede invertir una matriz en tal caso

$$z = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + \ldots + a_m \cdot x^5 \cdot y \Rightarrow ¿a_i?$$

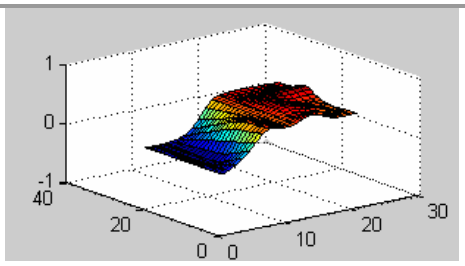
$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 \cdot y_1 & \cdots & x_1^5 \cdot y_1^2 & x_1^5 \cdot y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 \cdot y_2 & \cdots & x_2^5 \cdot y_2^2 & x_2^5 \cdot y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n \cdot y_n & \cdots & x_n^5 \cdot y_n^2 & x_n^5 \cdot y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \end{array}\right. \begin{array}{l} A \cdot incog = K \\ incog = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot K \\ \left(A^t \cdot A\right)^{-1} = ERROR \\ incog = \left(A^t \cdot A\right)^{-} \cdot A^t \cdot K \end{array} \quad (26)$$

Donde z es el Nivel Digital mientras 'x' e 'y' las coordenadas planas e el vecindario tomado

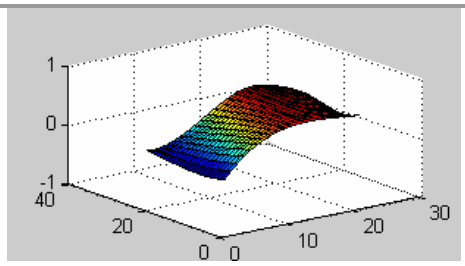
La solución optada pasa por sustituir la inversa normal por una inversa generalizada, en este caso se opta por la pseudoinversa de Moore-Penrouse (basada en la descomposición de autovalores y autovectores, implementada en matlab con la orden *pinv*).

Para completar el experimento se realizará tres soluciones más con los polinomios originales y empleo de la pseudoinversa.

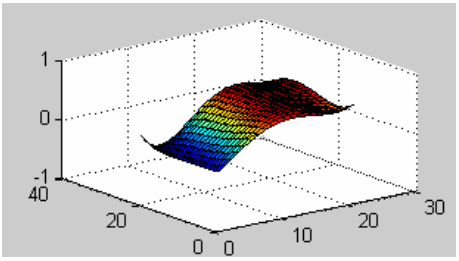
Por tanto, para seleccionar el polinomio tenemos 9 posibilidades. Hagamos en principio un análisis visual:



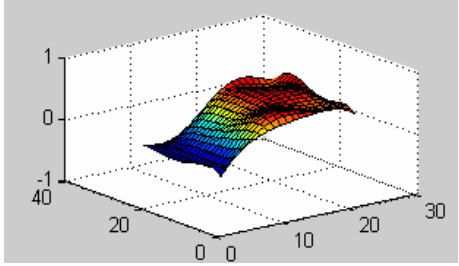
Terreno origina modelizar



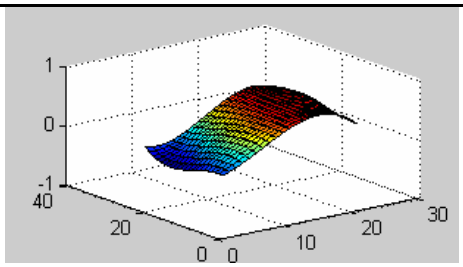
Modelo con añadido simétrico, grado 3



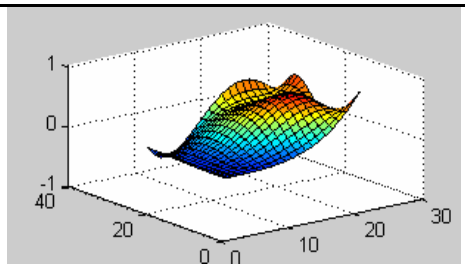
Modelo con añadido simétrico, grado 4



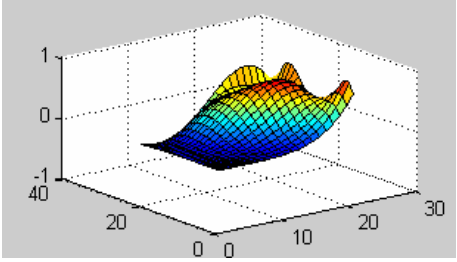
Modelo con añadido simétrico, grado 5



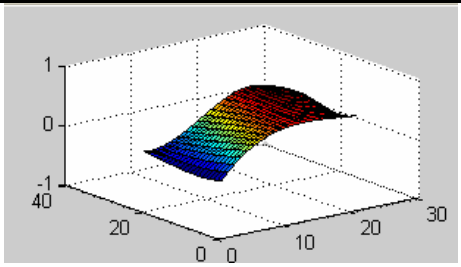
Modelo normal, grado 3 con pseudoinversa



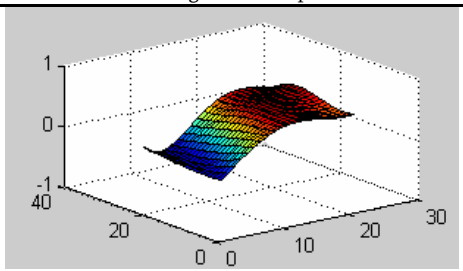
Modelo normal, grado 4 con pseudoinversa



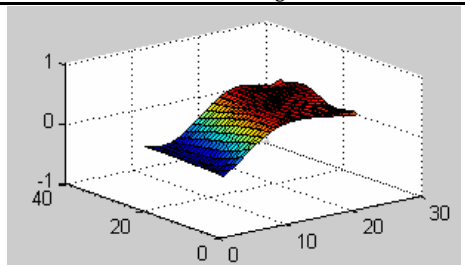
Modelo normal, grado 5 con pseudoinversa



Modelo normal, grado 3

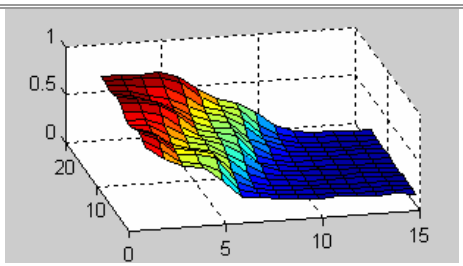


Modelo normal, grado 4

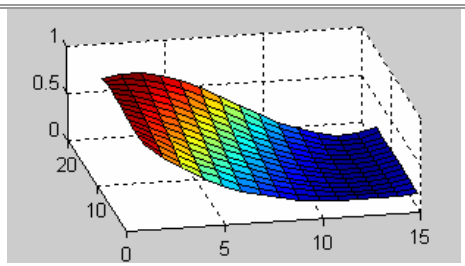


Modelo normal, grado 5

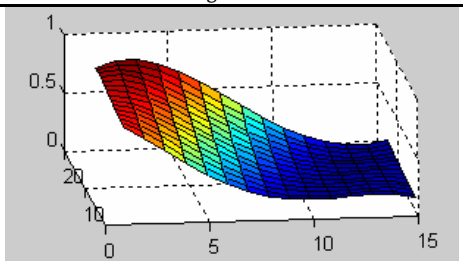
Figura 76. Primer ejemplo de vecindario resuelto



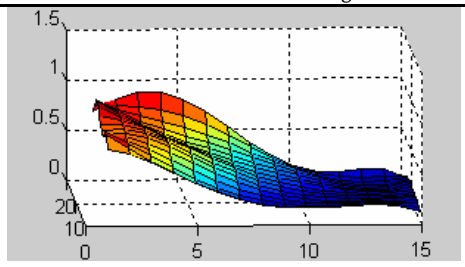
Terreno original a modelizar



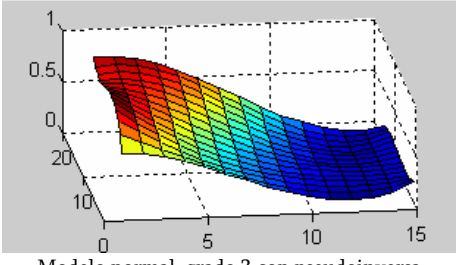
Modelo con añadido simétrico, grado 3



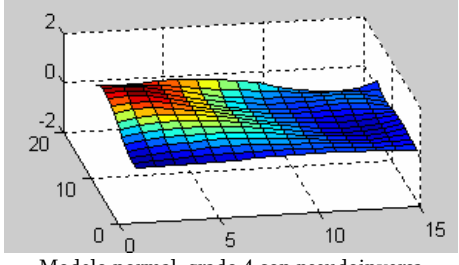
Modelo con añadido simétrico, grado 4



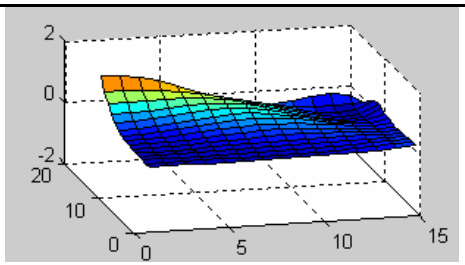
Modelo con añadido simétrico, grado 5



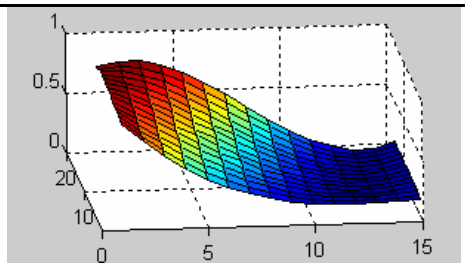
Modelo normal, grado 3 con pseudoinversa



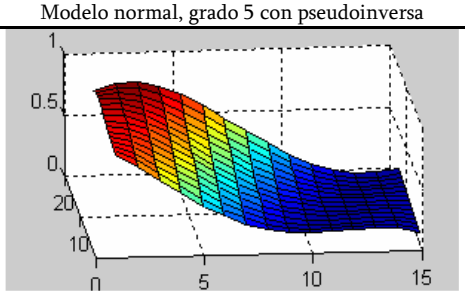
Modelo normal, grado 4 con pseudoinversa



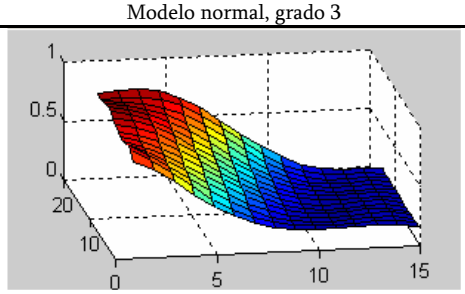
Modelo normal, grado 5 con pseudoinversa



Modelo normal, grado 3



Modelo normal, grado 4



Modelo normal, grado 5

Figura 77. Segundo ejemplo de vecindario resuelto

En primer lugar, los resultados al añadir las componentes simétricas al polinomio, no parecen aportar nada en absoluto. Por otro lado, resolver el sistema con pseudoinversa sí presenta cambios en los grados 4 y 5.

Las pruebas para comprobar si el origen de coordenadas afectaría era poco probable que aportara nada, pero no ilógico. Tenía justificación realizar la prueba y el resultado, el esperado.

Sin embargo, resolver mediante pseudoinversa surge como una prueba intuitiva y el resultado no es el esperado. Así, sin justificación previa llegamos a un resultado no esperado que cabe interpretarse. Observemos los resultados estadísticos de estos ajustes antes de sacar conclusiones. Las tablas siguientes aportan la información asociada a cada método de cálculo; dado que se realiza un ajuste para cada vecindario aportado desde cada punto de la línea aproximada lo que se ofrece a continuación es un promedio de todas las cantidades conjunto de la imagen calculada. Se especifica el tipo de polinomio, el tipo de inversión realizada, el grado de dicho polinomio y su información extraída.

		rango A	columnas A	Media de Residuos	Mínimo Residuo	Máximo Residuo	Desviacion
Simétrico. Pseudoinversa	Grado3	16	31	0 ± 0	-0.14825369 ± 0.0388	0.14404114 ± 0.03204	0.06595828 ± 0.01228
	Grado4	25	49	-7.9935E-06 ± 9.9489E-06	-0.11381305 ± 0.03139	0.11333086 ± 0.027486	0.0511481 ± 0.00993
	Grado5	36	71	-0.00059325 ± 0.000358	-0.13363306 ± 0.02966	0.13071208 ± 0.032127	0.05887554 ± 0.0101128
Normal. Pseudoinversa	Grado3	16	16	-0.00016325 ± 0.0002416	-0.15741996 ± 0.0381437	0.14730995 ± 0.030011	0.06762023 ± 0.011679
	Grado4	25	25	-0.0341036 ± 0.021414	-0.58824167 ± 0.19116	0.20872476 ± 0.022325	0.17441848 ± 0.05389
	Grado5	36	36	-0.10638786 ± 0.0478057	-0.70350591 ± 0.11565	0.32327357 ± 0.0555759	0.29063255 ± 0.08788
Normal. Inv. Estándar	Grado3	16	16	0 ± 0	-0.14825369 ± 0.038812	0.14404114 ± 0.032036	0.06595828 ± 0.01228
	Grado4	25	25	0 ± 0	-0.1124713 ± 0.03073	0.11283123 ± 0.02757	0.05090488 ± 0.0099305
	Grado5	36	36	8.817E-06 ± 9.645E-06	-0.08477876 ± 0.02519	0.07984712 ± 0.0218	0.03785274 ± 0.0089

Respecto al ajuste estándar de partida. Refiriéndonos a los polinomios normales lo primero que destaca de todos ellos es que la media de los residuos sea nula (el caso de 10^{-6} en el polinomio de grado 5 puede considerarse despreciable). Pero si observamos la media de máximos y mínimos residuos hay una ventaja clara con un polinomio de mayor grado, muchísimo más centrado en el 0 dado que el residuo se interpreta como la diferencia entre el valor de un píxel original y el modelado por el terreno matemático; todo ello es un buen criterio a favor del polinomio de grado 5.

Respecto al ajuste simétrico con pseudoinversa. Como se dijo, es un caso solo resoluble por pseudoinversa. Realmente no se espera emplear este tipo de ajuste dado que requeriría un estudio previo de los efectos que producen los coeficientes calculados mediante psudoinversa. Cabe recordar que en la carrera es posible estudiar varios aspectos al respecto en los sistemas linealizados de resolución de redes topográficas donde cada coeficiente es un diferencial de coordenadas de estaciones; son, por tanto, valores interpretables geométricamente. Queda aquí un campo de estudio. Nuestro interés radicaba en llegar a alguna solución visual que y los valores estadísticos obtenidos. Como se observa, el número de columnas es igual al número de términos del polinomio en cada caso, sin embargo, el rango de las matrices no supera aquellos que se tienen con polinomio normal; no aportan información numéricamente diferenciable respecto al polinomio original. Y llama la atención que, siendo la pseudoinversa una inversa generalizada con notables propiedades en redes, ahora *se obtenga residuos que la sitúan en desventaja respecto al método anterior*, pues los residuos máximos y mínimos, así como el residuo medio, se alejan del 0 (salvo en el caso del polinomio de grado 3 que excepto el residuo medio, se mantiene estable en los demás valores).

Respecto al ajuste estándar con solución pseudoinversa. Analizando por orden. En primer lugar, el análisis visual revelaba que para los grados 4 y 5, se obtiene superficies lejanas a las formas que querríamos obtener. En segundo lugar, las medidas de residuo medio, máximo y mínimo, vuelven a perder su centralidad respecto del 0 con mayor medida en los polinomios de grado 4 y 5. Así pues, *este resultado no era esperado* y cabe ser interpretado. Sin ser el objetivo de este proyecto no nos adentramos en la matemática interna del problema pero sería lógico pensar que el problema radica en la pseudoinversa. Para su cálculo se requiere establecer qué autovalores de la matriz original se pueden considerar nulos, y si matlab es muy estricto en estos términos es posible que anule algún autovalor cuando sigue siendo significativo (recordemos que los autovalores nulos de los que hablamos no son 0 en sí, sino valores muy pequeños respecto al resto de autovalores, y dado un umbral, se establece cuántos autovalores nulos ha de haber). Una pista para ver que estamos pensando correctamente es que, cuando se amplia el polinomio con las componentes simétricas, se esperaría (en caso de grado 3 ampliado) 15 autovalores *destacadamente pequeños* en comparación con los 16 originales eliminando así los autovalores correctos. Los 16 autovalores del polinomio normal es posible que estén confundiendo el proceso, que el criterio automático elimine erróneamente algún autovalor (estas conclusiones y comentarios son generalizables a los grados 4 y 5). Por otro lado, se puede pensar que la descentralidad de los residuos respecto al 0 se deba a cuestiones numéricas de cálculo. Por último, si la solución con pseudoinversa para los polinomios normales anula algún autovalor podemos interpretar intuitivamente, que algún parámetro se está acercando demasiado a un valor nulo, es decir, que el terreno no lo requiere para su modelización (trabajos de resolución en fotogrametría donde existen parámetros que resuelven en valores muy grandes y muy pequeños en un mismo sistema, se demostró que generan problemas numéricos; es posible estar encontrando algo parecido aquí).

Por la destacada centralidad en el 0 de los residuos obtenidos y la capacidad de amoldarse a terrenos con singularidades, se opta por el polinomio de orden 5 por variable, y solución inversa estándar.

10.3 Resolución del laplaciano nulo

Lo que se pretende en este anejo es presentar los polinomios completos del proceso descrito en el apartado de modelo matemático por superficies dado que si se hubiera presentado de esta forma, es posible que se hubiera perdido el hilo del desarrollo allí planteado. Recordemos, se parte del polinomio de grado 5 escogido (a partir de ahora, '*x*' e '*y*' serán empleados de forma análoga e indiferente a '*i*' y '*j*' empleados en programación):

$$f(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x^2 \cdot y^2 + \\ + a_{10} \cdot x^3 + a_{11} \cdot y^3 + a_{12} \cdot x^3 \cdot y + a_{13} \cdot x^3 \cdot y^2 + a_{14} \cdot x \cdot y^3 + a_{15} \cdot x^2 \cdot y^3 + a_{16} \cdot x^3 \cdot y^3 + a_{17} \cdot x^4 + \\ + a_{18} \cdot y^4 + a_{19} \cdot x^4 \cdot y + a_{20} \cdot x^4 \cdot y^2 + a_{21} \cdot x^4 \cdot y^3 + a_{22} \cdot x^4 \cdot y^4 + a_{23} \cdot x^3 \cdot y^4 + a_{24} \cdot x^2 \cdot y^4 + \\ + a_{25} \cdot x \cdot y^4 + a_{26} \cdot x^5 + a_{27} \cdot y^5 + a_{28} \cdot x \cdot y^5 + a_{29} \cdot x^2 \cdot y^5 + a_{30} \cdot x^3 \cdot y^5 + a_{31} \cdot x^4 \cdot y^5 + \\ + a_{32} \cdot x^5 \cdot y^5 + a_{33} \cdot x^5 \cdot y^4 + a_{34} \cdot x^5 \cdot y^3 + a_{35} \cdot x^5 \cdot y^2 + a_{36} \cdot x^5 \cdot y \qquad (27)$$

Que tiene su forma, un poco más enrevesada de la siguiente forma: $f(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & i & j & \cdots & i^5 \cdot j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ parámetros \\ \vdots \end{pmatrix}$

Siendo la forma de escribirlo en código:

(28)

```
[1 I j i*j i^2 j^2 i^2*j i*j^2 i^2*j^2 i^3 j^3 i^3*j i^3*j^2 i*j^3 i^2*j^3 i^3*j^3 i^4 j^4 i^4*j
i^4*j^2 i^4*j^3 i^4*j^4 i^3*j^4 i^2*j^4 i*j^4 i^5 j^5 i*j^5 i^2*j^5 i^3*j^5 i^4*j^5 i^5*j^5 i^5*j^4 i^5*j^3
i^5*j^2 i^5*j]*params4
```

Donde params4, es un vector columna

Siendo este el terreno matemático, recordemos que buscamos

$$f(x,y) \rightarrow \nabla f(x,y) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) \qquad (29)$$

Que, dado que el terreno original lo tenemos en forma vectorial, la obtención de las derivadas, es directa:

$$f_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 20\cdot x^3\cdot y^2 & 20\cdot x^3\cdot y \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{35} \\ a_{36} \end{pmatrix} \Bigg\} \nabla f = f_{xx} + f_{yy}$$

$$f_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^3 & 0 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{35} \\ a_{36} \end{pmatrix} \Bigg\}$$

Que tiene por resultado completo:

```
[ 0 0 0 0 2 0 2*j 0 2*j^2 6*i 0 6*i*j 6*i*j^2 0 2*j^3 6*i*j^3
  12*i^2 0 12*i^2*j 12*i^2*j^2 12*i^2*j^3 12*i^2*j^4 6*i*j^4 2*j^4 0 20*i^3 0 0 2*j^5
  6*i*j^5 12*i^2*j^5 20*i^3*j^5 20*i^3*j^4 20*i^3*j^3 20*i^3*j^2 20*i^3*j]*params4+[ 0 0 0 0
  0 2 0 2*i 2*i^2 0 6*j 0 2*i^3 6*i*j 6*i^2*j 6*i^3*j 0 12*j^2 0 2*i^4
  6*i^4*j 12*i^4*j^2 12*i^3*j^2 12*i^2*j^2 12*i*j^2 0 20*j^3 20*i*j^3 20*i^2*j^3 20*i^3*j^3 20*i^4*j^3
  20*i^5*j^3 12*i^5*j^2 6*i^5*j 2*i^5 0]*params4;
```

(30)

Conocida ya la función de laplaciano recordemos que la solución buscada es el lugar donde se hace 0

$$\begin{aligned} &\nabla f(x,y) = 0 \\ &f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0 \end{aligned} \qquad (31)$$

Pero, si a ello añadimos la condición de buscar un solo punto por perfil como se mencionó en la teoría, la solución debe cumplir:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla f(x,y) = 0 \\ &x \Rightarrow cte \end{aligned}\right\} \nabla f(y) = 0 \qquad (32)$$

Una opción consistió en realizar esta labor directamente. Es decir, tomar la expresión de laplaciano escrita, hacer *simbólicos 'i' y 'j'*, dar valor a una de las dos y dejar que matlab lo resolviera con sus propias funciones:

Para cada j determinado:
i=eval(solve(eval(laplaciano4)))

Y en perfiles perpendiculares:
j=eval(solve(eval(laplaciano4)))

Donde laplaciano4 es la expresión escrita anteriormente (con 'i' y 'j' en formato simbólico de matlab)

(33)

El problema radica en que en esa labor debe tomar el laplaciano simbólico, sustituir la coordenada conocida, resolverlo (encontrar la expresión que lo hace 0) en formato simbólico, y volver a evaluarlo para que ese formato simbólico tome valores, dando así

con las soluciones. En conjunto es correcto, resuelve bien, pero es una carga de cómputo muy grande.

Es así que sustituimos esa forma de resolver por una versión más manual, debemos sustituir en el polinomio anterior el valor de la coordenada correspondiente '*x*' ó '*y*' (labor realizada a mano) creando un nuevo polinomio cuya incógnita sea '*y*' ó '*x*' respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x,y)=0\\ x \Rightarrow cte\end{array}\right\} \nabla f(y)=(\cdots)_5\cdot y^5+(\cdots)_4\cdot y^4+(\cdots)_3\cdot y^3+(\cdots)_2\cdot y^2+(\cdots)_1\cdot y^1+(\cdots)_0 \qquad (34)$$

Que toma por resultado completo:

Cada perfil del laplaciano con 'i' y 'j' constante tomará la forma (**vuelve a presentarse en formato de multiplicación de matrices**):

([20*j^3*params4(32)+12*j^2*params4(33)+6*j*params4(34)+2*params4(35)

2*params4(20)+6*j*params4(21)+12*j^2*params4(22)+20*j^3*params4(31)

2*params4(13)+6*j*params4(16)+12*j^2*params4(23)+20*j^3*params4(30)+20*params4(26)+20*j^5*params4(32)
+20*j^4*params4(33)+20*j^3*params4(34)+20*j^2*params4(35)+20*j*params4(36)

2*params4(9)+6*j*params4(15)+12*j^2*params4(24)+20*j^3*params4(29)+12*params4(17)+12*j*params4(19)
+12*j^2*params4(20)+12*j^3*params4(21)+12*j^4*params4(22)+12*j^5*params4(31)

2*params4(8)+6*j*params4(14)+12*j^2*params4(25)+20*j^3*params4(28)+6*params4(10)+6*j*params4(12)
+6*j^2*params4(13)+6*j^3*params4(16)+6*j^4*params4(23)+6*j^5*params4(30)

2*params4(6)+2*params4(5)+6*j*params4(11)+12*j^2*params4(18)+20*j^3*params4(27)+2*j*params4(7)
+2*j^2*params4(9)+2*j^3*params4(15)+2*j^4*params4(24)+2*j^5*params4(29)]**)** * **i**

([2*params4(29)+6*i*params4(30)+12*i^2*params4(31)+20*i^3*params4(32)

12*i^2*params4(22)+6*i*params4(23)+2*params4(24)+20*i^3*params4(33)

20*params4(27)+20*i*params4(28)+20*i^2*params4(29)+20*i^3*params4(30)+20*i^4*params4(31)
+20*i^5*params4(32)+2*params4(15)+6*i*params4(16)+12*i^2*params4(21)+20*i^3*params4(34)

12*params4(18)+12*i^4*params4(22)+12*i^3*params4(23)+12*i^2*params4(24)+12*i*params4(25)
+12*i^5*params4(33)+2*params4(9)+6*i*params4(13)+12*i^2*params4(20)+20*i^3*params4(35)

6*params4(11)+6*i*params4(14)+6*i^2*params4(15)+6*i^3*params4(16)+6*i^4*params4(21)+6*i^5*params4(34)+
+2*params4(7)+6*i*params4(12)+12*i^2*params4(19)+20*i^3*params4(36)

2*params4(6)+2*params4(5)+2*i*params4(8)+2*i^2*params4(9)+2*i^3*params4(13)+2*i^4*params4(20)+
+2*i^5*params4(35)+6*i*params4(10)+12*i^2*params4(17)+20*i^3*params4(26)]**)** * **j** (35)

Donde **i** y **j** son vectores columna:

$$i=\begin{pmatrix} i^5\\ i^4\\ i^3\\ i^2\\ i\\ 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow j=\begin{pmatrix} j^5\\ j^4\\ j^3\\ j^2\\ j\\ 1\end{pmatrix}$$

Y llegados a esas expresiones que dibujan cada perfil de laplaciano, la resolución pasa por obtener las raíces del polinomio (rápida función de matlab *roots*):

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x,y)=0\\ x \Rightarrow cte\end{array}\right\}\nabla f(y)=(\cdots)_5\cdot y^5+(\cdots)_4\cdot y^4+(\cdots)_3\cdot y^3+(\cdots)_2\cdot y^2+(\cdots)_1\cdot y^1+(\cdots)_0$$

$$raíces=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5\end{bmatrix}$$

(36)

Luego las 5 soluciones en ese perfil son 5 pares de coordenadas:

$$\begin{bmatrix}(x,y_1) & (x,y_2) & (x,y_3) & (x,y_4) & (x,y_5)\end{bmatrix}$$

Como es lógico, el caso análogo surge en condiciones oportunas para cada 'y'

Ya se mencionó los criterios para filtrar las soluciones. Se espera haber mostrado que, detrás de cada aspecto matemático, ha habido de realizarse una labor manual interpretando matemáticamente todo y de forma constante.

10.4 Interpretación de consecuencias de derivación

10.4.1 Para el modelo de perfiles

Cuando se ideó la hipótesis de que una expresión pudiera servir para encontrar en el comportamiento de un perfil un punto concreto de inflexión, se prefirió realizar algunas pruebas en Excel a tal respecto. Son pruebas sencillas pero aclaratorias. La idea del significado de la primera derivada y segunda se había adquirido en geodesia en referencia a los radios de curvatura, pero cabía comprobar gráficamente lo correcto de los significados asumidos.

Dados unos valores para a, b, c y d. se rellena una tabla con estas expresiones:

⋮	⋮	⋮	⋮
Valores de abscisa x	$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$	$y' = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$	$y'' = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$
⋮	⋮	⋮	⋮

Figura 78. Realización de la tabla para exploración del significado geométrico del modelo de perfiles

Así una representación directa de x e y nos da la forma de la función.

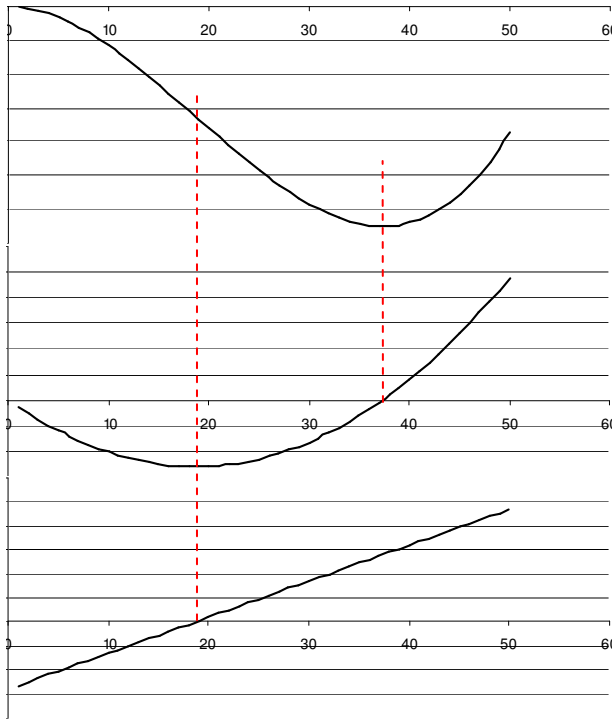
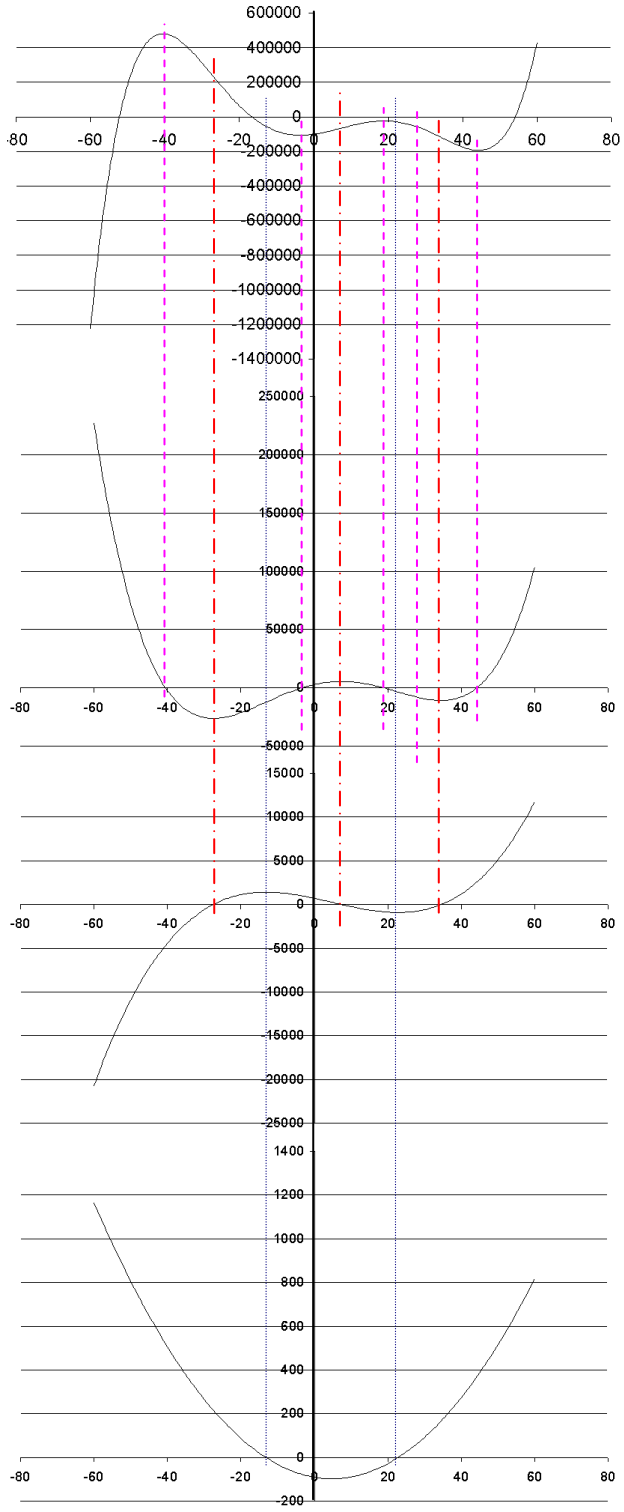


Figura 79. Realización de la tabla para exploración del significado geométrico del modelo de perfiles

De acuerdo con el gráfico la idea es que la primera derivada pierde un grado y nos da la pendiente, argumento que podrá ser de utilidad. Y el resolver el corte de una línea recta con el 0 es muy cómodo, lo cual se convierte en otro argumento para emplear una función original de 3º grado.

10.4.2 Para la obtención de la máxima curvatura

Ahora intentaremos presentar la interpretación polinómica requerida para la obtención del punto de máxima curvatura del terreno matemático original, lo que equivale según nuestra interpretación inicial a obtener los máximos del laplaciano. Ahora analizaremos una función de 5º orden en una sola variable para visualizarlo y tener una mejor idea.



Expresión **1**:

$$y = 0.005 \cdot x^5 - 0.12 \cdot x^4 - 15 \cdot x^3 + 350 \cdot x^2 + 3000 \cdot x - 100000$$

Raíces:
-52.2185
54.0832
-16.6091
19.3722 + 7.1483i
19.3722 - 7.1483i

Expresión **2**:

$$y = 0.025 \cdot x^4 - 0.48 \cdot x^3 - 45 \cdot x^2 + 700 \cdot x + 3000$$

Raíces:
-40.5031
44.2018
19.0245
-3.5232

Expresión **3:**

$$y = 0.1 \cdot x^3 - 1.44 \cdot x^2 - 90 \cdot x + 700$$

Raíces:
-27.5292
34.5748
7.3544

Expresión **4**:

$$y = 0.3 \cdot x^2 - 2.88 \cdot x - 90$$

Raíces:
22.7733
-13.1733

Figura 80. Significado geométrico de raíces en respectivas funciones derivadas

En la figura anterior (Figura.62) se representan desde la curva original hasta su tercera derivada y la ubicación intuitiva y numérica de cada paso por el cero de cada una. Esta es la información de que se dispone para trabajar. Aquello que podemos destacar frente al apartado anterior es el efecto de la tercera derivada. La última gráfica (4) toma el cero en los máximos y mínimos de la inmediata superior (3) que recordemos es la segunda derivada (de curvaturas, de la original) por tanto, en estos puntos tendremos máximos (de signo positivo y negativo) de esa curvatura, puntos donde el radio deberá hacerse mínimo en la función original. Conviene observar y diferencia estas líneas de aquellas que se hacen 0 el segundo polinomio, con los que hallaríamos los máximo y mínimo de la función original puesto que esta divergencia ya se ha hecho notar en el apartado del proyecto de nuevas aportaciones. En este caso tenemos una demostración numérica concreta.

Sirva este apartado, a su vez, para comprender el significado de la tercera derivada de un perfil en el tratamiento de perfiles la función original.

10.5 Tablas de resultados

El conjunto de líneas procesadas es el siguiente. Se indica el nombre del fichero, con algunas características del mismo que se consideró anotar en su momento. Hay diferentes notaciones porque el momento y los criterios han ido variando. Se añade también el número de puntos de cada línea:

NOMBRE	COUNT
CP_0406_14p4_z1_v2_f8	1855
CP_0406_14p4_z1_v2_f8_dilate	1855
CP_0406_14p4_z1_v2_f8_erode	1855
CP_0406_14p4_z2_v2_f8	1440
CP_0406_14p4_z2_v3_f8	1383
CP_0406_14p4_z3_v2_f8	1657
CP_0406_14p4_z3_v3_f8	1898
CP_0406_14p4_z4	2475
CP_0406_14p4_z4_v3_f8	1168
CP_0406_19p2_z1_v2_f8	1153
CP_0406_19p2_z1_v3_f8	1276
CP_0406_19p2_z2_v3_f6	686
CP_0406_19p2_z2_v3_f8	920
CP_0406_19p2_z3_v3_f8	1478
CP_0406_19p2_z4_v2_f8	1886
CP_0406_19p2_z4_v3_f8	1811
CP_0406_24p0	4733
CP_0406_28p8	3951
CP_0406_2p4_z1	1866
CP_0406_2p4_z1_2	2754
CP_0406_2p4_z3	3342
CP_0406_2p4_z4	3791
CP_0406_4p8_z2_v5_f2	1122
CP_0406_4p8_z3_v5_f2	1598
CP_0406_9p6_v4	2211
CP_0406_9p6_z1_v4	2990
CP_0406_9p6_z3_v4_f8	3401
CP_0406_9p6_z4_v4_f8	2365
CP_0406_z1_v5_f2	1290
CP_0506_z1f2	2610
CP_0605_ 28p8	3882
CP_0605_14p4_z1v2f6	2527
CP_0605_14p4_z2_v2f6	2857
CP_0605_24	4554
CP_0605_28p8_correg_v3f4	1869
CP_0605_2p4_z2f2	2083
CP_0605_2p4_z3_v5_f2	3413
CP_0605_2p4_z4f2	3739
CP_0605_4p8_z3v5f2	1691
CP_0605_4p8_z4fv5f2	1913
CP_0605_9p6_z1v3f2	1391
CP_0605_9p6_z2v3f2	1073
CP_0605_9p6_z4v3f2	1902
CP_0605_z1v5f2	1434
CP_0605_z2v5f2	1117
CP_0605_z3_v3_f2	1663
CP_19p2_v2_f6	3986
CP_4p8_z4_v5_f2	1778
IR_0406_14p4_z1	1884
IR_0406_14p4_z2	1787
IR_0406_19p2	3946
IR_0406_24p4_v3_f8	4564
IR_0406_28p8_v3_f8	3807
IR_0406_2p4_z1_2	2789
IR_0406_2p4_z1_b4	2533
IR_0406_2p4_z1_b4_1	2482
IR_0406_2p4_z3_v4_f2	2579
IR_0406_2p4_z3_v6_f2	2775
IR_0406_2p4_z4_v3_f2	3742

IR_0406_2p4_z4_v3_f2__b	3064
IR_0406_2p4_z4_v5_f2	3087
IR_0406_4p8_z1_v4_f2	1214
IR_0406_4p8_z2_v4_f2	1103
IR_0406_4p8_z3_v4_f2	1246
IR_0406_4p8_z4_v4_f2	1809
IR_0406_9p6_z1_v2_f6	1811
IR_0406_9p6_z1_v5_f6	2040
IR_0406_9p6_z2_v2_f6	1346
IR_0406_9p6_z3_v2_f6	2245
IR_0406_9p6_z4_v2_f6	2155
IR_0406_9p6_z4_v4_f6	3817
IR_0605_14p4_z1v3f6	1189
IR_0605_14p4_z2v3f6	999
IR_0605_14p4_z4v3f6	1671
IR_0605_19p2_z1v2f8	1181
IR_0605_19p2_z2v2f8	978
IR_0605_19p2_z3v3f8	1621
IR_0605_19p2_z4v2f8	1499
IR_0605_24p0_v2f8	3632
IR_0605_24p0_v3f8	4703
IR_0605_28p8	2848
IR_0605_2p4_z1v6f2	2456
IR_0605_2p4_z2v12f2	1917
IR_0605_2p4_z2v6f2	1937
IR_0605_2p4_z4v6f2	5749
IR_0605_4p8_z1v5f2	1218
IR_0605_4p8_z3v5f2	1507
IR_0605_4p8_z4v5f2	1818
IR_0605_9p6_z1v3f6	1808
IR_0605_9p6_z3v3f6	2135
IR_0605_9p6_z4v3f6	2509
IR_0605_z2v5f2	998
IR0605_14p4_z3v3f6	1526
IR0605_19p2_z4v3f8	1782
IR0605_9p6_z2v3f6	1474

Exponemos aquí las tablas que han generado los gráficos para el apartado de resultados. Se da una media para cada tipo de imagen y su tamaño de píxel, independientemente del tipo de imagen con que

IR2005									
TAM_PIX	COUNT	MEDIA_D	MIN_D	MAX_D	SDEV_D	X_REF	Y_REF	X	Y
2	12420	1.73	0.00	14.84	1.22	731164.11	4358085.07	731162.53	4358084.55
4	4328	0.88	0.00	5.58	0.72	731559.11	4357152.95	731558.45	4357152.72
9	7580	1.07	0.00	6.24	0.81	731326.53	4357364.80	731327.12	4357364.98
14	5151	2.49	0.00	9.44	1.44	731148.57	4356264.44	731150.79	4356265.16
19	6725	4.96	0.00	13.52	2.48	731458.97	4355614.41	731463.55	4355615.94
24	7681	7.33	0.00	22.55	3.25	731533.88	4358502.31	731540.71	4358504.55
28	2630	9.91	0.00	21.67	3.35	731481.10	4357875.06	731490.34	4357878.13

IR2005			
TAM_PIX	INC_X	INC_Y	HIPOTENUSA
2	-1.58	-0.52	1.66
4	-0.66	-0.23	0.70
9	0.59	0.18	0.62
14	2.21	0.72	2.33
19	4.58	1.54	4.83
24	6.83	2.24	7.19
28	9.24	3.08	9.74

CP_2005

TAM_PIX	COUNT	MEDIA_D	MIN_D	MAX_D	SDEV_D	X_REF	Y_REF	X	Y
2	12807	0.52	0.00	15.26	0.53	731436.91	4357907.42	731436.89	4357907.42
4	5828	0.56	0.00	6.08	0.46	731169.79	4356787.40	731169.54	4356787.34
9	4124	1.22	0.00	5.49	0.82	731081.56	4356847.52	731080.54	4356847.23
14	4963	1.52	0.00	7.35	1.24	731424.53	4357893.61	731423.47	4357893.32
19	3659	2.15	0.00	9.35	1.70	731528.58	4358440.28	731527.15	4358439.90
24	4199	3.18	0.00	11.56	2.08	731558.02	4358579.53	731555.81	4358578.86
28	5138	4.15	0.00	35.18	3.46	731467.88	4357846.55	731467.09	4357846.35

CP_2005

TAM_PIX	INC_X	INC_Y	HIPOTENUSA
2	0.02	0.00	0.02
4	0.25	0.06	0.25
9	1.01	0.29	1.05
14	1.06	0.29	1.10
19	1.43	0.38	1.48
24	2.21	0.67	2.31
28	0.79	0.20	0.82

IR_2006

TAM_PIX	COUNT	MEDIA_D	MIN_D	MAX_D	SDEV_D	X_REF	Y_REF	X	Y
2	21704	1.46	0.00	16.35	1.29	731559.34	4358084.21	731559.48	4358084.25
4	5098	1.04	0.00	7.92	0.94	731264.61	4357154.99	731264.29	4357154.90
9	12738	1.99	0.00	9.00	1.35	731473.82	4357366.06	731472.22	4357365.51
14	3394	3.07	0.00	12.60	1.61	731214.03	4357291.07	731211.23	4357290.12
19	3591	6.01	0.00	16.41	2.28	731521.79	4358434.82	731516.22	4358432.93
24	4137	6.82	0.00	17.39	2.65	731567.32	4358540.41	731561.01	4358538.32
28	3467	8.95	0.00	20.64	3.32	731531.75	4358347.49	731523.45	4358344.73

IR_2006

TAM_PIX	INC_X	INC_Y	HIPOTENUSA
2	-0.14	-0.05	0.15
4	0.32	0.09	0.33
9	1.60	0.55	1.69
14	2.81	0.96	2.97
19	5.57	1.89	5.88
24	6.32	2.09	6.65
28	8.30	2.77	8.74

IR2005

TAM_PIX	COUNT	MEDIA_D	MIN_D	MAX_D	SDEV_D	X_REF	Y_REF	X	Y
2	11532	0.68	0.00	5.54	0.56	731468.36	4358121.41	731468.23	4358121.40
4	5710	1.01	0.00	8.24	0.74	731183.26	4356649.44	731182.45	4356649.20

9	10901	1.67	0.00	9.89	1.12	730715.44	4360150.23	730714.17	4360149.86
14	15414	2.64	0.00	20.80	2.51	730824.61	4358461.18	730822.43	4358460.54
19	9000	2.44	0.00	14.30	1.90	731187.75	4356178.56	731186.74	4356178.28
24	4393	2.83	0.00	17.35	2.44	731563.99	4358616.52	731563.19	4358616.31
28	3608	3.23	0.00	18.55	2.70	731524.47	4358407.59	731524.02	4358407.50

IR2005			
TAM_PIX	INC_X	INC_Y	HIPOTENUSA
2	0.13	0.01	0.13
4	0.82	0.24	0.85
9	1.27	0.38	1.33
14	2.17	0.64	2.27
19	1.01	0.28	1.04
24	0.80	0.21	0.83
28	0.44	0.09	0.45

10.6 Algoritmos completos de máximo laplaciano

La labor realizada para poder llegar a presentar resultados de localización del máximo laplaciano ha sido ardua y laboriosa por el tipo de trabajo con polinomios. Es ese trabajo el que se presenta a continuación dado que su ubicación en la redacción de la memoria podría haber provocado la pérdida del hilo conductor. Nuevamente se empleará la notación *('x' 'y')* ó *('i' 'j')* indiferentemente:

10.6.1 Perfiles a la función original

Se trata de tomar perfiles, en las direcciones principales, de la función del terreno matemático original y trabajar a partir de ello encontrando la tercera derivada. Representábamos el esquema procedimental con:

$$f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = cte \rightarrow f(y) \Rightarrow f_{yyy}(y) = 0 \\ y = cte \rightarrow f(x) \Rightarrow f_{xxx}(x) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Que desglosado lo podemos ver así. Recordemos que la expresión del terreno matemático original resulta de la multiplicación de vectores siguiente:

```
[1 I j i*j i^2 j^2 i^2*j i*j^2 i^2*j^2 i^3 j^3 i^3*j i^3*j^2 i*j^3 i^2*j^3 i^3*j^3 i^4 j^4 i^4*j
i^4*j^2 i^4*j^3 i^4*j^4 i^3*j^4 i^2*j^4 i*j^4 i^5 j^5 i*j^5 i^2*j^5 i^3*j^5 i^4*j^5 i^5*j^5 i^5*j^4
i^5*j^3 i^5*j^2 i^5*j]*params4
```

(38)

Donde params4 es un vector columna que contiene los 36 coeficientes que definen cada terreno. La expresión de los perfiles en las direcciones principales tomará la siguiente forma:

En dirección x (i):

$$\left.\begin{matrix} f(x,y) = 0 \\ y \Rightarrow cte \end{matrix}\right\} f(x) = (\cdots)_5 \cdot x^5 + (\cdots)_4 \cdot x^4 + (\cdots)_3 \cdot x^3 + (\cdots)_2 \cdot x^2 + (\cdots)_1 \cdot x^1 + (\cdots)_0$$

```
[ (params4(26)+j*params4(36)+j^2*params4(35)+j^3*params4(34)+j^4*params4(33)+j^5*params4(32))
  (params4(17)+j*params4(19)+j^2*params4(20)+j^3*params4(21)+j^4*params4(22)+j^5*params4(31))
  (params4(10)+j*params4(12)+j^2*params4(13)+j^3*params4(16)+j^4*params4(23)+j^5*params4(30))
  (params4(5)+j*params4(7)+j^2*params4(9)+j^3*params4(15)+j^4*params4(24)+j^5*params4(29))
  (params4(2)+j*params4(4)+j^2*params4(8)+j^3*params4(14)+j^4*params4(25)+j^5*params4(28))
(params4(1)+j*params4(3)+j^2*params4(6)+j^3*params4(11)+j^4*params4(18)+j^5*params4(27))…] * i
```

(39)

Donde $i = \begin{pmatrix} i^5 \\ i^4 \\ i^3 \\ i^2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

En dirección y (j)

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ x \Rightarrow cte \end{array}\right\} f(y)=(\cdots)_5\cdot y^5+(\cdots)_4\cdot y^4+(\cdots)_3\cdot y^3+(\cdots)_2\cdot y^2+(\cdots)_1\cdot y^1+(\cdots)_0$$

[..(params4(27)+i*params4(28)+i^2*params4(29)+i^3*params4(30)+i^4*params4(31)+i^5*params4(32))
(params4(18)+i^4*params4(22)+i^3*params4(23)+i^2*params4(24)+i*params4(25)+i^5*params4(33))
(params4(11)+i*params4(14)+i^2*params4(15)+i^3*params4(16)+i^4*params4(21)+i^5*params4(34))
(params4(6)+i*params4(8)+i^2*params4(9)+i^3*params4(13)+i^4*params4(20)+i^5*params4(35))
(params4(3)+i*params4(4)+i^2*params4(7)+i^3*params4(12)+i^4*params4(19)+i^5*params4(36))
(params4(1)+i*params4(2)+i^2*params4(5)+i^3*params4(10)+i^4*params4(17)+i^5*params4(26))] * j (40)

Donde $j=\begin{pmatrix} j^5 \\ j^4 \\ j^3 \\ j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, si derivamos tres veces:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\cdots)_5\cdot x^5+(\cdots)_4\cdot x^4+(\cdots)_3\cdot x^3+(\cdots)_2\cdot x^2+(\cdots)_1\cdot x^1+(\cdots)_0 \\ f_x(x) &= 5\cdot(\cdots)_5\cdot x^4+4\cdot(\cdots)_4\cdot x^3+3\cdot(\cdots)_3\cdot x^2+2\cdot(\cdots)_2\cdot x+(\cdots)_1 \\ f_{xx}(x) &= 20\cdot(\cdots)_5\cdot x^3+12\cdot(\cdots)_4\cdot x^2+6\cdot(\cdots)_3\cdot x+2\cdot(\cdots)_2 \\ f_{xxx}(x) &= 60\cdot(\cdots)_5\cdot x^2+24\cdot(\cdots)_4\cdot x+6\cdot(\cdots)_3 \end{aligned}$$

Con analogía directa teniendo 'y' como variable (41)

Que en términos completos se convierte en:

Para perfiles 'i':

[60*(params4(26)+j*params4(36)+j^2*params4(35)+j^3*params4(34)+j^4*params4(33)+j^5*params4(32))
24*(params4(17)+j*params4(19)+j^2*params4(20)+j^3*params4(21)+j^4*params4(22)+j^5*params4(31))
6*(params4(10)+j*params4(12)+j^2*params4(13)+j^3*params4(16)+j^4*params4(23)+j^5*params4(30))] * i

Donde $i=\begin{pmatrix} i^2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

Para perfiles 'j':

[60*(params4(27)+i*params4(28)+i^2*params4(29)+i^3*params4(30)+i^4*params4(31)+i^5*params4(32))
24*(params4(18)+i^4*params4(22)+i^3*params4(23)+i^2*params4(24)+i*params4(25)+i^5*params4(33))
6*(params4(11)+i*params4(14)+i^2*params4(15)+i^3*params4(16)+i^4*params4(21)+i^5*params4(34))] * j (42)

Donde $j=\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$

Dado que la condición supuesta para encontrar el máximo laplaciano es la anulación de estos perfiles la solución pasa por resolver sus raíces (automático a través de la orden

roots de matlab). A partir las posibilidades de la solución múltiple se lleva a cabo los criterios de elección de solución mencionados en su momento.

10.6.2 Obtención del máximo laplaciano por perfiles

Se trata de resolver perfiles tomados de la figura del laplaciano. El esquema procedimental, recordemos, es:

$$f(x,y) \Rightarrow \nabla f(x,y) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = cte \rightarrow \nabla f(y) \Rightarrow \nabla f_y(y) = 0 \\ y = cte \rightarrow \nabla f(x) \Rightarrow \nabla f_x(x) = 0 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Aprovechemos cuestiones ya mencionadas con anterioridad. En el anejo de resolución del laplaciano nulo (ver fórmula 34) se llega a la expresión que describe el perfil en cada dirección principal de la figura del laplaciano. Se trata de un polinomio en función de *'i'* y *'j'* respectivamente para cada perfil. La solución se reduce a derivar cada perfil y encontrar las raíces de los polinomios resultantes:

Para perfiles 'i':

```
[  5*(20*j^3*params4(32)+12*j^2*params4(33)+6*j*params4(34)+2*params4(35))

 4*(2*params4(20)+6*j*params4(21)+12*j^2*params4(22)+20*j^3*params4(31))

 3*(2*params4(13)+6*j*params4(16)+12*j^2*params4(23)+20*j^3*params4(30)+
 +20*params4(26)+20*j^5*params4(32)+20*j^4*params4(33)+20*j^3*params4(34)+
 +20*j^2*params4(35)+20*j*params4(36))

 2*(2*params4(9)+6*j*params4(15)+12*j^2*params4(24)+20*j^3*params4(29)+
 +12*params4(17)+12*j*params4(19)+12*j^2*params4(20)+12*j^3*params4(21)+
 +12*j^4*params4(22)+12*j^5*params4(31))

 2*params4(8)+6*j*params4(14)+12*j^2*params4(25)+20*j^3*params4(28)+6*params4(10)+
 +6*j*params4(12)+6*j^2*params4(13)+6*j^3*params4(16)+6*j^4*params4(23)+6*j^5*params4(30)  ] * i
```

$$i = \begin{pmatrix} i^4 \\ i^3 \\ i^2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Para perfiles 'j':

```
[  5*(2*params4(29)+6*i*params4(30)+12*i^2*params4(31)+20*i^3*params4(32))

 4*(12*i^2*params4(22)+6*i*params4(23)+2*params4(24)+20*i^3*params4(33))

 3*(20*params4(27)+20*i*params4(28)+20*i^2*params4(29)+20*i^3*params4(30)+
 +20*i^4*params4(31)+20*i^5*params4(32)+2*params4(15)+6*i*params4(16)+
 +12*i^2*params4(21)+20*i^3*params4(34))

 2*(12*params4(18)+12*i^4*params4(22)+12*i^3*params4(23)+12*i^2*params4(24)+
 +12*i*params4(25)+12*i^5*params4(33)+2*params4(9)+6*i*params4(13)+12*i^2*params4(20)+
 +20*i^3*params4(35))

 6*params4(11)+6*i*params4(14)+6*i^2*params4(15)+6*i^3*params4(16)+6*i^4*params4(21)+
 +6*i^5*params4(34)+2*params4(7)+6*i*params4(12)+12*i^2*params4(19)+20*i^3*params4(36)]  * j
```

(45)

$$j = \begin{pmatrix} j^4 \\ j^3 \\ j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución vuelve a quedar reducida a encontrar raíces a estos polinomios.

10.6.3 Máximo laplaciano direccional

Este apartado conlleva la mayor labor en lo que a sustitución y reagrupación de términos a nivel de polinomio se refiere. Recordemos que lo que se pretende es encontrar la expresión de aquel perfil de la superficie de laplaciano sujeto a la restricción de una recta:

$$\nabla f(x,y) \Rightarrow x = m \cdot y + b \Rightarrow \nabla f(y) \quad (46)$$

Pero esta simpleza conceptual lleva a una dificultad laboriosa cuando lo que interesa es obtener un polinomio reagrupado dependiente de una sola variable. Recordemos que el laplaciano es la suma de las dos segundas derivadas respecto a cada variable:

```
[     0     0     0     0     2     0   2*j     0  2*j^2   6*i     0   6*i*j  6*i*j^2     0  2*j^3  6*i*j^3
   12*i^2     0  12*i^2*j  12*i^2*j^2  12*i^2*j^3  12*i^2*j^4   6*i*j^4   2*j^4     0  20*i^3     0     0  2*j^5
 6*i*j^5  12*i^2*j^5  20*i^3*j^5  20*i^3*j^4  20*i^3*j^3  20*i^3*j^2  20*i^3*j]*params4+[     0     0     0     0
     0     2     0   2*i  2*i^2     0   6*j     0  2*i^3   6*i*j  6*i^2*j  6*i^3*j     0  12*j^2     0  2*i^4
 6*i^4*j  12*i^4*j^2  12*i^3*j^2  12*i^2*j^2  12*i*j^2     0  20*j^3 20*i*j^3  20*i^2*j^3  20*i^3*j^3  20*i^4*j^3
                20*i^5*j^3  12*i^5*j^2   6*i^5*j   2*i^5     0]*params4;
```

(47)

La ecuación de la recta será conocida por lo que cada *'i'* deberá ser sustituida por *i=m*j+b* (que en la programación a tomado la notación: *i=angulo*j+b*). No cabe entrar en cómo se sustituye una variable, pero obsérvese el polinomio que describirá ese perfil en función de la sola variable *'j'*.

```
dfx(8)=[2*params4(5)+2*params4(6)+(2*b)*params4(8)+(2*b^2)*params4(9)+(6*b)*params4(10)+
+0*params4(12)+(2*b^3)*params4(13)+(12*b^2)*params4(17)+(2*b^4)*params4(20)+0*params4(21)+
+(20*b^3)*params4(26)+(2*b^5)*params4(35)];

dfx(7)=[2*params4(7)+(2*angulo)*params4(8)+(4*angulo*b)*params4(9)+(6*angulo)*params4(10)+
+6*params4(11)+(6*b)*params4(12)+(6*angulo*b^2)*params4(13)+(6*b)*params4(14)+(6*b^2)*params4(15)+
+6*b^3*params4(16)+(24*angulo*b)*params4(17)+(12*b^2)*params4(19)+(8*angulo*b^3)*params4(20)+
+(6*b^4)*params4(21)+(60*angulo*b^2)*params4(26)+(6*b^5)*params4(34)+(10*b^4*angulo)*params4(35)+
+(20*b^3)*params4(36)];

dfx(6)=[(2+2*angulo^2)*params4(9)+(6*angulo)*params4(12)+(6*b+6*angulo^2*b)*params4(13)+
+(6*angulo)*params4(14)+(12*angulo*b)*params4(15)+(18*angulo*b^2)*params4(16)+(12*angulo^2)*params4(17)+
+12*params4(18)+(24*angulo*b)*params4(19)+(12*b^2+12*angulo^2*b^2)*params4(20)+(24*angulo*b^3)*params4(21)+
+(12*b^4)*params4(22)+(12*b^3)*params4(23)+(12*b^2)*params4(24)+(12*b)*params4(25)+
+(60*angulo^2*b)*params4(26)+(12*b^5)*params4(33)+(30*b^4*angulo)*params4(34)+(20*b^3+
+20*angulo^2*b^3)*params4(35)+(60*angulo*b^2)*params4(36)];

dfx(5)=[(6*angulo+2*angulo^3)*params4(13)+(2+6*angulo^2)*params4(15)+(6*b+18*angulo^2*b)*params4(16)+
+(12*angulo^2)*params4(19)+(8*angulo^3*b+24*angulo*b)*params4(20)+(12*b^2+36*angulo^2*b^2)*params4(21)+
+(48*angulo*b^3)*params4(22)+(36*angulo*b^2)*params4(23)+(24*angulo*b)*params4(24)+
+(12*angulo)*params4(25)+(20*angulo^3)*params4(26)+20*params4(27)+(20*b)*params4(28)+
+(20*b^2)*params4(29)+(20*b^3)*params4(30)+(20*b^4)*params4(31)+(20*b^5)*params4(32)+
+(60*b^4*angulo)*params4(33)+(20*b^3+60*angulo^2*b^3)*params4(34)+(20*angulo^3*b^2+
+60*angulo*b^2)*params4(35)+(60*angulo^2*b)*params4(36)];

dfx(4)=[(6*angulo+6*angulo^3)*params4(16)+(2*angulo^4+12*angulo^2)*params4(20)+(24*angulo*b+
```

(48)

+24*angulo^3*b)*params4(21)+(12*b^2+72*angulo^2*b^2)*params4(22)+(6*b+36*angulo^2*b)*params4(23)+
+(2+12*angulo^2)*params4(24)+(20*angulo)*params4(28)+(40*angulo*b)*params4(29)+(60*angulo*b^2)*params4(30)+
+(80*angulo*b^3)*params4(31)+(100*b^4*angulo)*params4(32)+(20*b^3+120*angulo^2*b^3)*params4(33)+
+(60*angulo^3*b^2+60*angulo*b^2)*params4(34)+(10*angulo^4*b+60*angulo^2*b)*params4(35)+(20*angulo^3)*params4(36)];

dfx(3)=[(6*angulo^4+12*angulo^2)*params4(21)+(48*angulo^3*b+24*angulo*b)*params4(22)+
+(12*angulo^3+6*angulo)*params4(23)+(2+20*angulo^2)*params4(29)+(6*b+60*angulo^2*b)*params4(30)+
+(12*b^2+120*angulo^2*b^2)*params4(31)+(20*b^3+200*angulo^2*b^3)*params4(32)+(120*angulo^3*b^2+
+60*angulo*b^2)*params4(33)+(30*angulo^4*b+60*angulo^2*b)*params4(34)+(2*angulo^5+20*angulo^3)*params4(35)];

dfx(2)=[(12*angulo^4+12*angulo^2)*params4(22)+(6*angulo+20*angulo^3)*params4(30)+(24*angulo*b+
+80*angulo^3*b)*params4(31)+(200*angulo^3*b^2+60*angulo*b^2)*params4(32)+(60*angulo^4*b+
+60*angulo^2*b)*params4(33)+(6*angulo^5+20*angulo^3)*params4(34)];

dfx(1)=[(20*angulo^4+12*angulo^2)*params4(31)+(100*angulo^4*b+60*angulo^2*b)*params4(32)+
+(12*angulo^5+20*angulo^3)*params4(33)];

dfx(0)=[(20*angulo^5+20*angulo^3)*params4(32)];

Y el polinomio que describe ese perfil será:

$$\nabla f(j) = \begin{pmatrix} dfx(8) & dfx(7) & dfx(6) & dfx(5) & dfx(4) & dfx(3) & dfx(2) & dfx(1) & dfx(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j^8 \\ j^7 \\ j^6 \\ j^5 \\ j^4 \\ j^3 \\ j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tras esta labor se toma las raíces nuevamente y, con los criterios comentados en el apartado oportuno, definir la línea de máxima curvatura.

10.7 Teoría Active Shape models

Para la realización del trabajo fin de carrera hubo varias opciones y, ante la duda de llevar adelante el estudio sobre la línea de costa, para el que no se había ideado siquiera la teoría del laplaciano, se propuso indagar e implementar la herramienta propuesta en el artículo "*Classification of crops segmented by Active Sahpe models*" (Maria Johanson, Njörn Astrand). Se trata de un artículo donde que presenta un método con el objetivo de detectar automáticamente hojas de remolacha. Puede parecer extraño, pero los sistemas para automatización en el ámbito agrario están desarrollándose sobremanera; el empleo de GPS para la ubicación de los límites de la parcela, el uso de los SIGs para control de las zonas de la misma donde la maquinaria detecta la necesidad de regar más o la existencia de malas hierbas, y ahora la teledetección para, reconociendo la cepa automáticamente a través de una imagen, realizar un empleo más restringido y preciso de los productos químicos sobre tales cepas de la planta determinada (con el consiguiente ahorro, dado que se pierde mucha cantidad de productos químicos de abono y tratamiento en zonas desnudas del cultivo).

El campo de reconocimiento de patrones y formas es un campo extendido. Se trata de ser capaz de reconocer figuras en la imagen y, como objetivo consecuente, poder clasificar cada objeto en una *clase* concreta. El reconocimiento de huellas digitales es un caso clásico de este campo y el reconocimiento facial está siendo desarrollado también desde varios puntos de vista. Pero la idea de reconocer elementos similares a patrones es algo en auge en pro del mencionado reconocimiento facial mencionado en imágenes de vigilancia, o búsqueda de elementos concretos como maletas o bolsas en aeropuertos y zonas públicas. Además, el tratamiento industrial automatizado está demandando herramientas para automatizar el control aprovechando imágenes de vigilancia, en lo que entran dos de nuestras ramas: la *fotogrametría* en cuanto a algoritmos de posicionamiento, calibración y precisión geométrica, y la *teledetección* en cuanto a un eventual tratamiento espectral si se tuviera sensores especiales, y más allá, reconocer dentro de una imagen los elementos deseados de forma automática, lo que sería el primer paso para tomar decisiones automáticas en el correspondiente proceso industrial (la detección de errores en la corrección de piezas y/o estructuras fabricadas es un ejemplo en pleno auge). Además estas cuestiones son parte del camino hacia la inteligencia artificial. Independientemente de que sea un campo muy explotado en las series y películas de ficción, es un campo en el que las herramientas, los algoritmos y la programación no cesan.

Entrando en materia, la idea más sencilla para reconocimiento de formas es el de la matriz de correlación, muy empleada como base de los primeros OCR, "*Optical caracter recognition*" (reconocimiento automático de caracteres, herramienta por la que se extrae caracteres de una imagen, por ejemplo de una carta escaneada). El análisis de correlación es un método que evalúa la similitud entre dos matrices, una de referencia o modelo y otra que es el objeto de la comparación. Una idea sencilla sería la búsqueda de marcas fiduciales en un fotograma aéreo; teniendo en una librería pequeñas matrices con el dibujo de la marca fiducial, se recorrería el fotograma. Lógicamente la correlación será máxima cuando la matriz de referencia se superponga a la posición de la marca fiducial, localizando así su posición.

Pero existe otro enfoque que nos ha de hacer variar el concepto de trabajo. Se trata de no analizar *matriz*Vs*matriz* sino las propiedades derivadas del contorno de un objeto. No entramos ahora en cómo llegar a encontrar ese objeto en la imagen, para cada trabajo se desarrollará formas de binarización, umbralización y/o segmentación diferentes, se trata ahora de tomar esa imagen donde, de entre todos los elementos resultantes de la

concreta umbralización, se debe reconocer qué elementos (*objetos* en el caso de imágenes segmentadas) son aquello que buscamos (por ejemplo: cuántos tornillos de cierto tipo se pueden contabilizar y de qué tipo, cuantos coches aparecen en una imagen aérea, detección de figuras humanas, localización de lunares, localización de huesos en radiografías, localización de errores de micras en tratamiento industrial mediante microfotogrametría…). Para ello existen diversas ideas y campos de trabajo:

-Lo más conocido y directo es que, tomando esa imagen binarizada se recorra su contorno mediante ***el código cadena***. Consiste en que cada dirección píxel a píxel que vaya tomando ese contorno reciba un número. El conjunto de números es un recorrido de las direcciones de ese contorno.

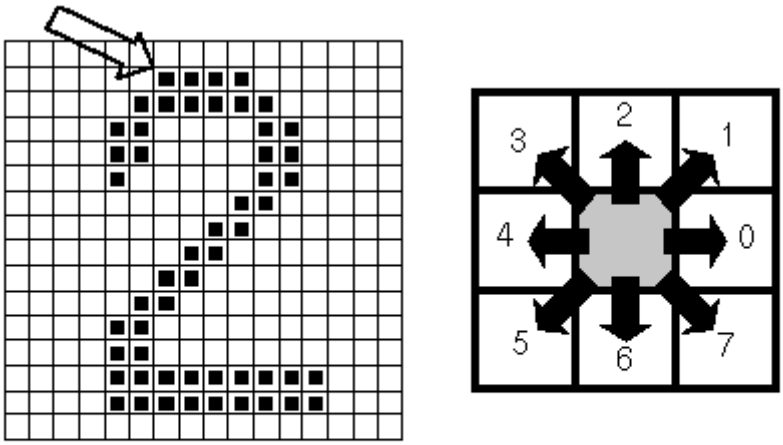


Figure 3.1 An example chain code; the reference pixel is marked by an arrow:
00007766555555660000000644444444222111111223444565221 1.

Figura 81. Figura de representación del código cadena, aquel que cifra las direcciones de un contorno mediante número.

-Criterios basados en ***momentos***. Es la notación general por la que se nombra a un conjunto de parámetros (momentos μ_i) como son la media (μ_1), la varianza ($\mu_2 = \sigma^2$), skewness (μ_3) o el parámetro de kurtosis (μ_4). También existe los llamados ***momentos geométricos***, y los ***momentos de Hu***. En conjunto son parámetros que, dado un tipo de contorno, generan cifras similares, o al menos es lo que se busca. Pensemos que lo ideal sería encontrar un algoritmo tal que, al procesar un contorno de determinada fuera claramente similar a los elementos de su especie y muy diferente a los de cualquier otra.

-Los ***descriptores de Fourier*** tienen una gran importancia por las peculiaridades geométricas. Resulta que cada par de coordenadas del contorno de la figura se ha de presentar en forma de número complejo, $(x, y) \Rightarrow (x + yi)$. El primer descriptor (trabajando en números complejos no olvidemos que incluye en él una parte real y otra imaginaria) nos da el centro de gravedad de la figura. Esos descriptores, una vez calculados los podemos tener en formato imaginario normal, o transformarlos a módulo y ángulo. En esta segunda forma también tienen su peculiaridad puesto que una misma figura girada hace variar los ángulos de esos descriptores, pero no su módulo. Al escalar, el primer descriptor crece, pero todos los demás mantiene la misma relación respecto a él. Conociendo cómo afecta cada posibilidad de modificación a los descriptores sería cuestión de realizar operaciones tales que, se presentara la figura como se presentara, llevara siempre a unas mismas cifras, siendo así un criterio de

similitud y aceptación de que una figura procesada fuera o no una figura conocida concreta.

Estos algoritmos, como se ha dicho, requieren tener localizado el contorno de la figura. A veces es posible una buena umbralización y comenzar a trabajar con ellos pero no siempre es posible. El problema de esa localización ha llevado a ideas muy imaginativas, pero también un tanto complejas. En este sentido comienza a hablarse de equilibrio de energías. Para introducir esta idea energética comentamos el proceso de ***snakes***.

Se trata de cerrar el contorno en derredor de una figura. Consiste en dejar una línea aleatoria en una imagen, esa línea deberá buscar el contorno del objeto que encierra. La forma en que se realiza la búsqueda puede variar pero la técnica de gradientes es nombrada en multitud de artículos.

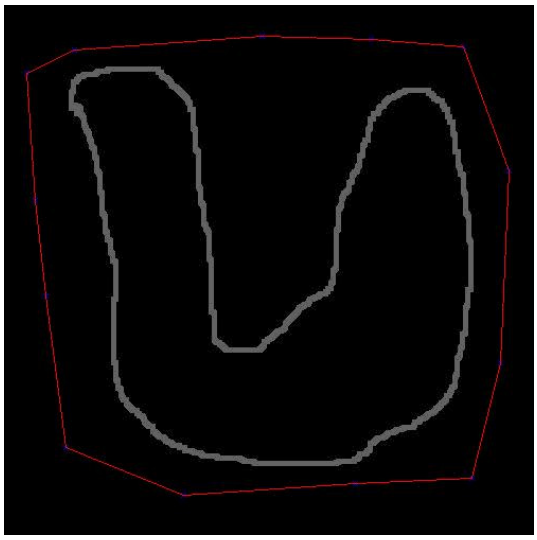


Figura y la línea que habrá de llegar a captarla

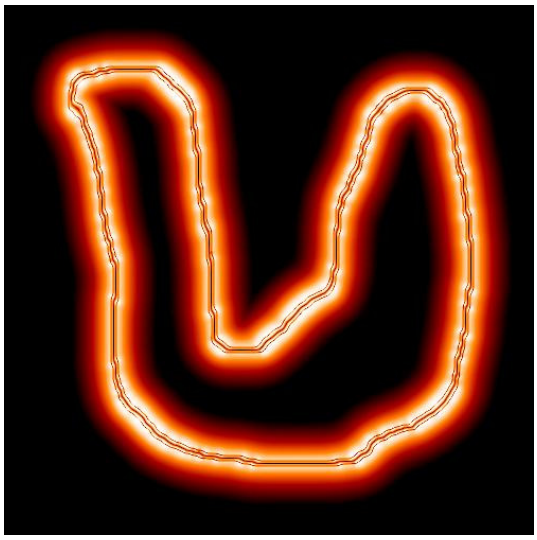
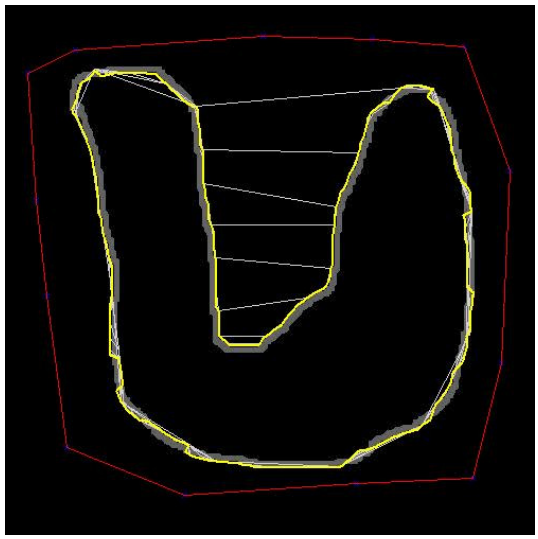


Imagen en color del efecto de un gradiente, GVF (Gradien Vector Flow). Los puntos de la línea habrán de saber así hacia dónde acercarse.



En un proceso iterativo la línea amarilla se va aproximando y amoldándose a la figura.

Figura 82. Proceso de aproximación de la snake mediante GVF

La imagen de gradiente representa la fuerza que ha de atraer a la línea, en términos de energía es una *fuerza externa*. Sigamos observando ejemplos, si bien el caso de antes era simple por tener que cerrarse sobre un elemento lineal, los objetos reales son sólidos:

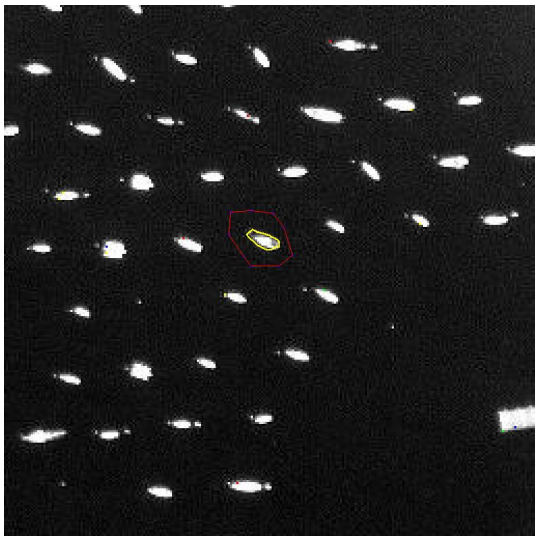


Imagen y proceso iterativo de acercamiento de la línea amarilla

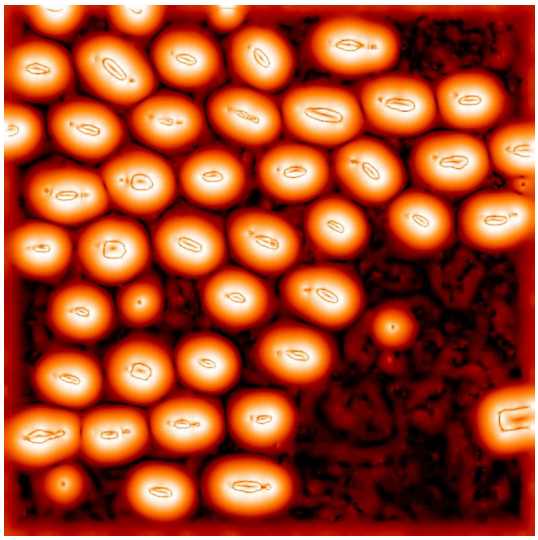


Imagen de GVF que la genera.

Figura 83. Efecto visual de la generación de fuerzas externas GVF

El problema del que debemos percatarnos es el de que la línea ahora no puede tener plena libertad, no se puede permitir que llegue a un proceso infinito de búsqueda o que no deje nunca de curvarse y autocorregirse. Deberá seguir guiándose a través del mapa de gradientes que se muestra, las '*fuerzas externas*' mencionadas, y lo que evitará ciertas características de la curva son las llamadas '*fuerzas internas*', formas de constreñir la libertad de la propia línea. Estas *fuerzas* son las que gestionan la uniformidad de número de puntos y distancia entre sí, así como una relación con el centro de gravedad que evite vértices, condiciones de curvado o la relación longitud-anchura. El criterio de *fuerzas internas* es muy variable pero su objetivo es controlar el tipo de movilidad de la '*snake*'. El método es curioso y permite comprender la idea de controlar el movimiento mediante energías. En sí no hemos visto que sirva para detectar automáticamente objetos por dos razones: las imágenes son muy específicas y adecuadas para un buen mapa de gradientes, y por otro lado, requieren de posicionar manualmente la línea inicial.

Existe una considerable variedad de procedimientos para detectar el contorno de las figuras ubicadas en una imagen, y otros tantos con el objetivo de poder distinguir el tipo de elementos que se observan efectivamente en la imagen de estudio. La teoría para el empleo de las '*snakes*' introduce además el concepto de equilibrio energético para el posicionamiento de una línea aleatoria.

La teoría de '*Active Shape Models*' aúna de algún modo varios conceptos anteriores. En primer lugar, no es un trabajo a modo de correlación sino basado en los puntos del contorno de una figura, pareados *(x, y)*. Y en segundo lugar, se trata de un modo de trabajo que pretende contener implícitamente tanto la capacidad de amoldarse a una figura como la capacidad de indicar si es un tipo de figura determinado. Mediante muestras de cierta figura, o cierto tipo de figura, se genera una figura media con cierta capacidad plástica para amoldarse al objeto que esté testeando, lo cual, en caso de ser nuestro objetivo nos haría prestar atención a lo expuesto sobre energías. De todas

formas la principal aportación de la teoría de '*Active Shape Models*' es la capacidad plástica de amoldarse a varias versiones de un mismo objeto. Al igual que con la teoría de *snakes* no se pretende juzgar en qué punto de cierto proceso de reconocimiento de objetos debe emplearse. ***Vamos a aprovecharnos de su empleo de la teoría de Componentes Principales, para poder extender su teoría y proponer otro método de trabajo para con la detección de la línea de costa***.

A continuación se presenta una breve interpretación de la teoría de componentes principales. Seguidamente se particularizará para el caso conocido de Componentes Principales aplicadas a bandas espectrales y la aplicación a figuras y su contorno (ejemplificado con una aplicación). Ello dará pie a comprender la sugerencia escrita en la memoria.

10.7.1 Teoría breve de Componentes Principales

Los Componentes Principales sirven como tratamiento estadístico y geométrico. En cuanto a estadístico se entiende que se tendrá '*n*' individuos o muestras con '*p*' variables cada uno. Pueden ser varias bandas (individuos) con cierto número de píxeles (equivalente ahora las variables) o medidas de diferentes índole en diferentes estados de un mismo objeto (medida de las dimensiones de un mineral en diferentes estados). En cualquier caso se trata de extraer la información más correlada consecutivamente:

Así pues, dada la muestra:

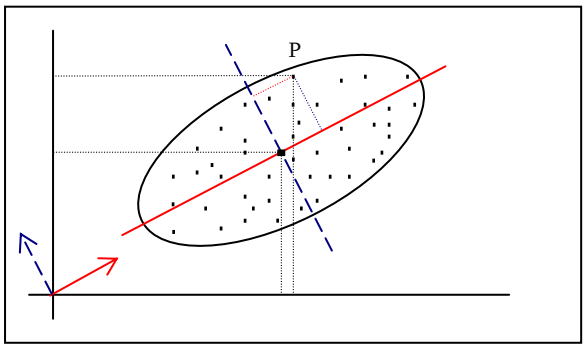
$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,1} & & x_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\Downarrow$$

$$X_{media=}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

$$X_{desviaciones=}\begin{pmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{x2} & \cdots & \sigma_{xp} \end{pmatrix}$$

Que gráficamente se representaría como sigue.



Se parte de una nube de puntos (individuos) con su par de coordenadas (lo que en general serían 'variables'). Lo representamos poniendo cada punto según su 'x' e 'y'. Si de todos ellos obtenemos su media tendremos las coordenadas del punto central. Los valores (σ_x, σ_y) son representantes de la dispersión en horizontal y en vertical, la matriz VarCovar tiene esa misma información amén de la interrelación entre ellas. Siendo de dimensión 2x2, se extrae 2 autovectores de 2 dimensiones.

Los autovectores solo indican dos direcciones, indicadas con las flechas roja y azul. Son las direcciones de los dos semiejes de la elipse que englobaría a los puntos de la muestra. Las Componentes Principales son el resultado de proyectar cada punto sobre las direcciones de los autovectores, aproximadamente lo representado en rojo y azul discontinuo. Como se observa, de cada Componente principal, la desviación de la primera (roja) sería la máxima que esta nube de puntos puede dar, consecutivamente y perpendicular a la anterior se tendría la desviación de los puntos proyectados en la segunda componente (azul).

Figura 84. Generación gráfica de las componentes principales

Estadísticamente se emplean para obtener nuevas variables con maximización consecutiva de varianzas de dichas nuevas variables y para la independencia entre las mismas. Geométricamente se consigue los ejes de inercia de cualquier figura a partir de su contorno.

10.7.2 CP en bandas y aplicación en ASM

A modo de repaso particularicemos el modelo matemático anterior para los casos de Componentes Principales en bandas espectrales y para la forma de trabajo de los Active Shape Models.

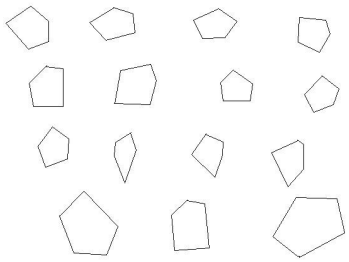
El empleo de autovectores para las CP en imágenes multiespectrales es el más sencillo. Todos los píxeles de cada banda serían las muestras de ella. Estaríamos trabajando con una nube de *n* puntos *p_dimensionales* (*n,* número de píxeles; *p,* número de bandas). Con la media de cada banda encontramos las *p* coordenadas del centro del hiperelipsoide que contiene todas las bandas:

$$
\begin{aligned}
&X = \begin{pmatrix} x_{pix1,banda1} & x_{pix1,banda2} & \cdots & x_{pix1,banda'p'} \\ x_{pix2,banda1} & x_{pix2,banda2} & & x_{pix1,banda'p'} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{pix'n',banda1} & x_{pix'n',banda2} & \cdots & x_{pix'n',banda'p'} \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
&X_{media=}\begin{pmatrix} \bar{x}_{banda1} & \bar{x}_{banda2} & \cdots & \bar{x}_{banda'p'} \end{pmatrix} \\
&X_{desviaciones=}\begin{pmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{x2} & \cdots & \sigma_{xp} \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
&VarCov = \sigma_{'pbandas'x'pbandas'} \\
&\Downarrow \\
&p \text{ autovectores, } p \text{ dimensionales}
\end{aligned}
\qquad (50)
$$

Y extraída la matriz VarCovar, se obtiene los autovectores proyectando sobre los cuales se da a cada píxel el valor de la respectiva CP.

A continuación veamos un proceso completo de aplicación de los Active Shape Models. Para ello, revisemos el proceso completo descrito en el artículo mencionado. Partimos de una serie de figuras. Cada figura de la muestra tiene un número de puntos, cada uno de dos coordenadas. Para tener un modelo de deformación de una figura es necesario tomar un número suficiente de muestras.

Ejemplo1: imagen con pentágonos aleatorios



Cada pentágono y cada avión son muestras respectivas para obtener un pentágono medio y un avión medio que posteriormente podremos modificar.
Cada pentágono es un conjunto de 10 puntos (pues tomamos también el puntos medio de cada lado). Si además comenzamos a tomar puntos desde cada uno de los cinco vértices tendremos (5*15=) 75 figuras.
De cada avión se toma 26 puntos.

Ejemplo2: varias imágenes con aviones

Figura 85. Punto de partida para los modelos plásticos

Lo que tenemos es una lista de coordenadas del contorno de cada figura:

$$Figura1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \\ x_{ptos} & x_{ptos} \end{pmatrix} \leftrightarrow Figura2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \\ x_{ptos} & x_{ptos} \end{pmatrix} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow Figura_{figs} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \\ x_{ptos} & x_{ptos} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Pero de momento no pueden ser muestras de una misma figura puesto que hay pentágonos y aviones orientados en diferentes direcciones y con diferentes tamaños. El modelo deformable de cada figura no incluye el escalado, de modo que habremos de tomar un pentágono y un avión de referencia y trasladar, escalar y girar las figuras para alinear todas las muestras:

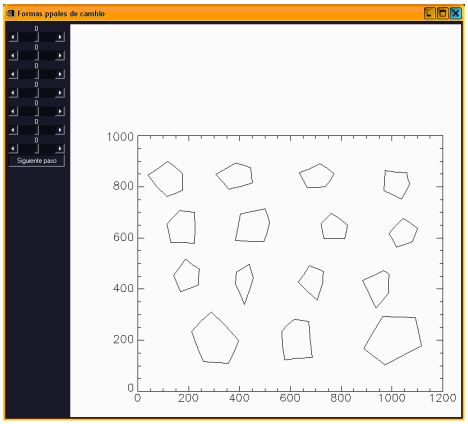
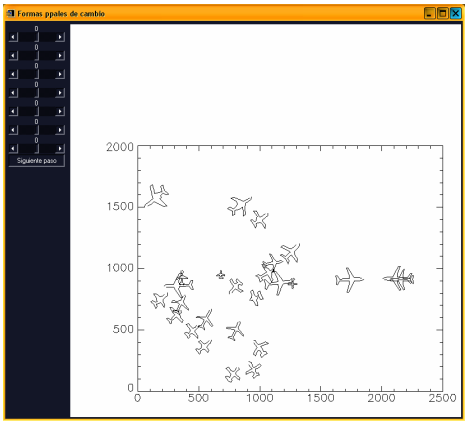
Ejemplo1: visualizamos las figuras a través de los listados de coordenadas anteriores	Ejemplo2: como existe varias imágenes, los aviones aparecen con cierto caos:
	

Figura 86. Imágenes con todas las figuras de la muestra en la misma imagen

En este caso se toma la primera figura de la muestra y el resto de las figuras son trasladadas, giradas y escaladas a ella:

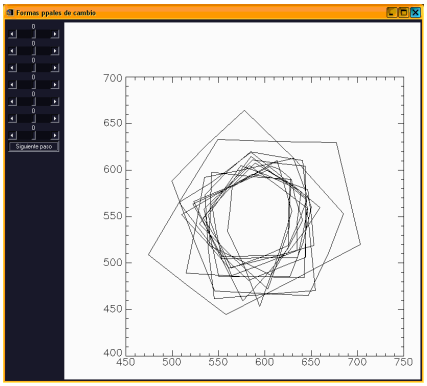
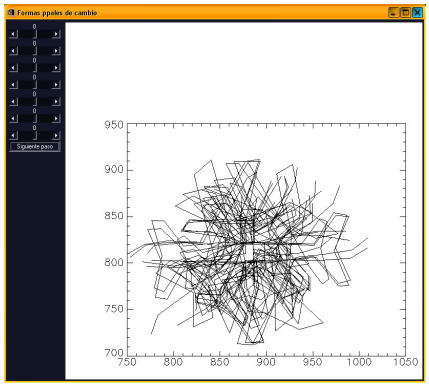
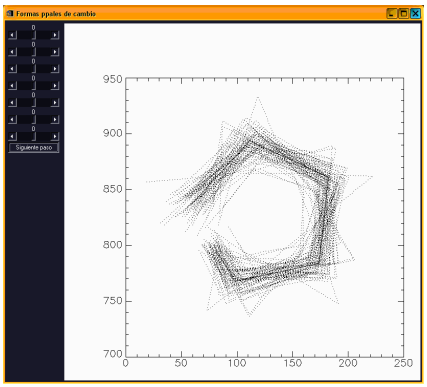
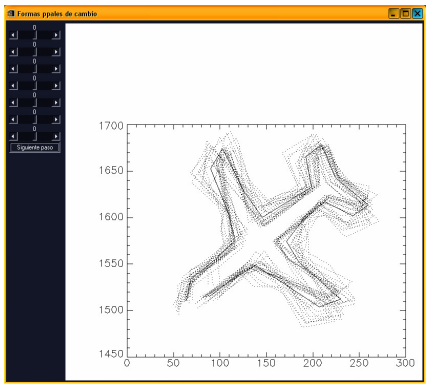
Ejemplo1: Las figuras trasladadas al centro de gravedad de la primera	Ejemplo2: Se observa que los único que tienen en común es el número de puntos del contorno
	
Y llevando las figuras (Giro traslación y homotecia) en modo iterativo a la figura tomada como modelo:	
	

Figura 87. Alineación y homogeneización de las figuras

Ahora se observa que existe un pentágonos medio y un avión medio. Adaptando el modelo de autovectores para este trabajo:

Siendo $(x_{pto,figura})$é$(y_{pto,figura})$

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & y_{1,1} & x_{2,1} & y_{2,1} & \cdots & x_{p,1} & y_{p,1} \\ x_{1,2} & y_{1,2} & x_{2,2} & y_{2,2} & \cdots & x_{p,2} & y_{p,2} \\ x_{1,3} & y_{1,3} & x_{2,3} & y_{2,3} & \cdots & x_{p,3} & y_{p,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1,n} & y_{1,n} & x_{2,n} & y_{21,n} & \cdots & x_{p,n} & y_{p,n} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$X_{media=}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \cdots & x_p & y_p \end{pmatrix}$$

$$X_{desviaciones=}\begin{pmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{y1} & \sigma_{x2} & \sigma_{y2} & \cdots & \sigma_{xp} & \sigma_{yp} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$VarCov = \sigma_{'2\,pbandas'x'2\,pbandas'}$$

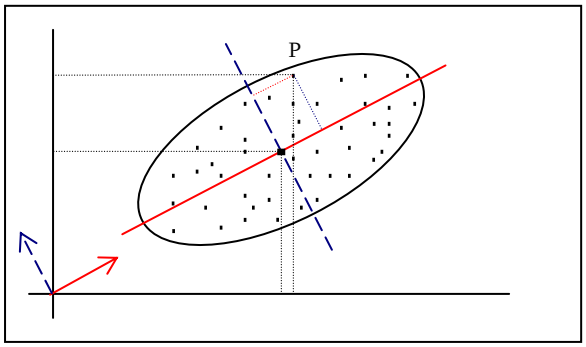
$$\Downarrow$$

$2 \cdot p$ autovectores ,$2 \cdot p$ dimensionales

(52)

Desde el punto de vista geométrico tendríamos un número de puntos igual al número de figuras, pero en un espacio de *2*p* dimensiones siendo *p* el número de puntos de la figura. Sería una nube de puntos es un espacio *2p_dimensional* Pensemos que el modelo plástico podrá deformar tanto la '*x*' como la '*y*' de cada punto de modo que hay que dejar de pensar en los puntos de esa forma y pensar que los *p* puntos son *2p* coordenadas que ubican cada figura en ese hiperespacio.

El avance de los Active Shape Models radica en que con ellos se obtiene las principales formas de variación de la muestra. Recuperemos la figura de la elipse para visualizar la idea:



Con la nube de puntos se ha generado los autovectores, pero es posible pensar del revés. Desde el punto central es posible llegar a cualquiera de los demás puntos sumando un valor a su 'x' e 'y' pero también sumando una cantidad a lo largo de la dirección de los autovectores. Pero es de suma importancia percatarse de que **un incremento desde el punto central en la dirección de los autovalores afecta a las dos coordenadas 'x' e 'y'.** Sumar un valor a lo largo del autovector implica un incremento de coordeanadas que no afecta

solo a una de las coordenadas. Aún más, supongamos que el semieje menor de la elipse fuera sumamente pequeño, podríamos aproximar las coordenadas de cualquier punto de la nube sumando a las coordenadas medias, un fragmento de autovector rojo. Eso suele pasar cuando se tiene más dimensiones.

Figura 88. Generación gráfica de las componentes principales

En base a lo dicho, cada uno de esos puntos serían *2p* coordenadas de nuestras figuras, o lo que es lo mismo, una figura diferente. Cada forma podría obtenerse mediante la forma media y un incremento en la dirección de cada autovector:

$$x = x_{media} + P \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{pmatrix}_{media} + \begin{pmatrix} av1_{x1} & av2_{x1} & \cdots & av'2p'_{x1} \\ av1_{y1} & av2_{y1} & \cdots & av'2p'_{y1} \\ av1_{x2} & av2_{x2} & \cdots & av'2p'_{x2} \\ av1_{y2} & av2_{y2} & \cdots & av'2p'_{y2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ av1_{xp} & av2_{xp} & \cdots & av'2p'_{xp} \\ av1_{yp} & av2_{yp} & \cdots & av'2p'_{yp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{av1} \\ b_{av2} \\ \vdots \\ b_{av'2p'} \end{pmatrix} \quad (53)$$

Cada b_{avi} serían las coordenadas del punto en el espacio de autovectores, o dicho de otro modo, sería la magnitud que, de cada autovector, queremos incrementar a nuestra figura media para llegar a otra en concreto. Como se observa, cada autovector influirá a todas las coordenadas. Podemos jugar con ello:

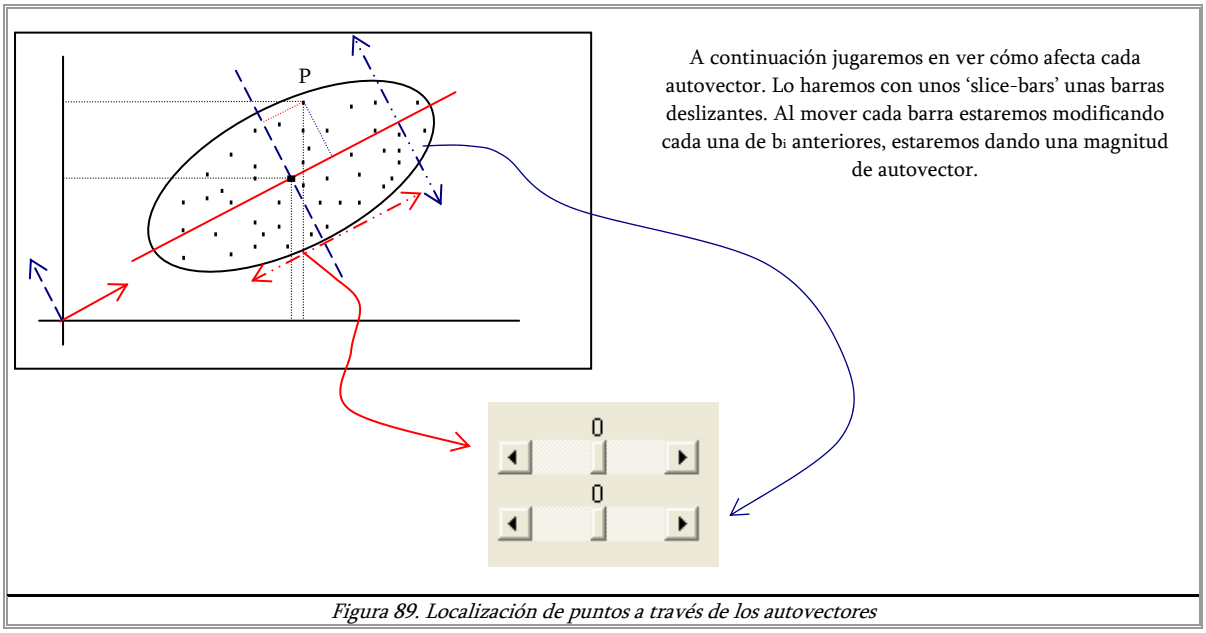
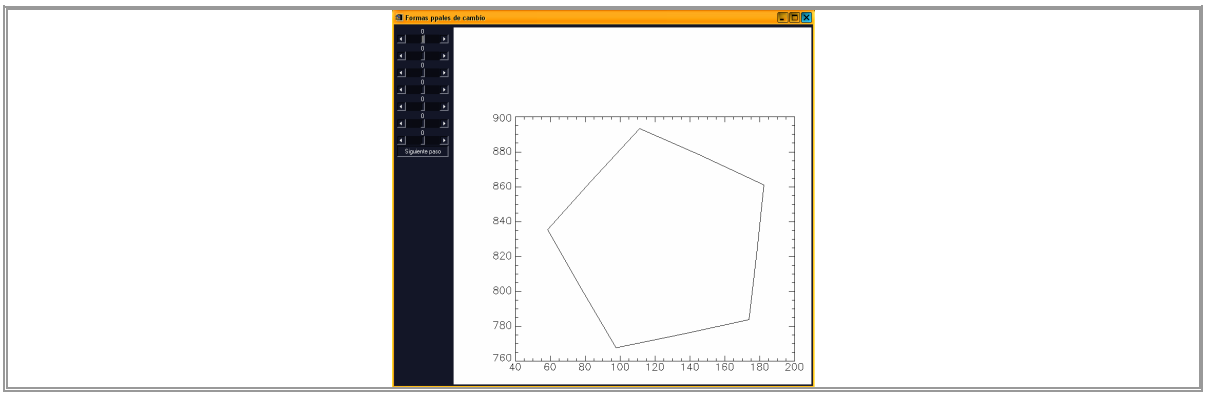


Figura 89. Localización de puntos a través de los autovectores

Lo que aplicado a nuestras figuras (pentágonos y aviones):



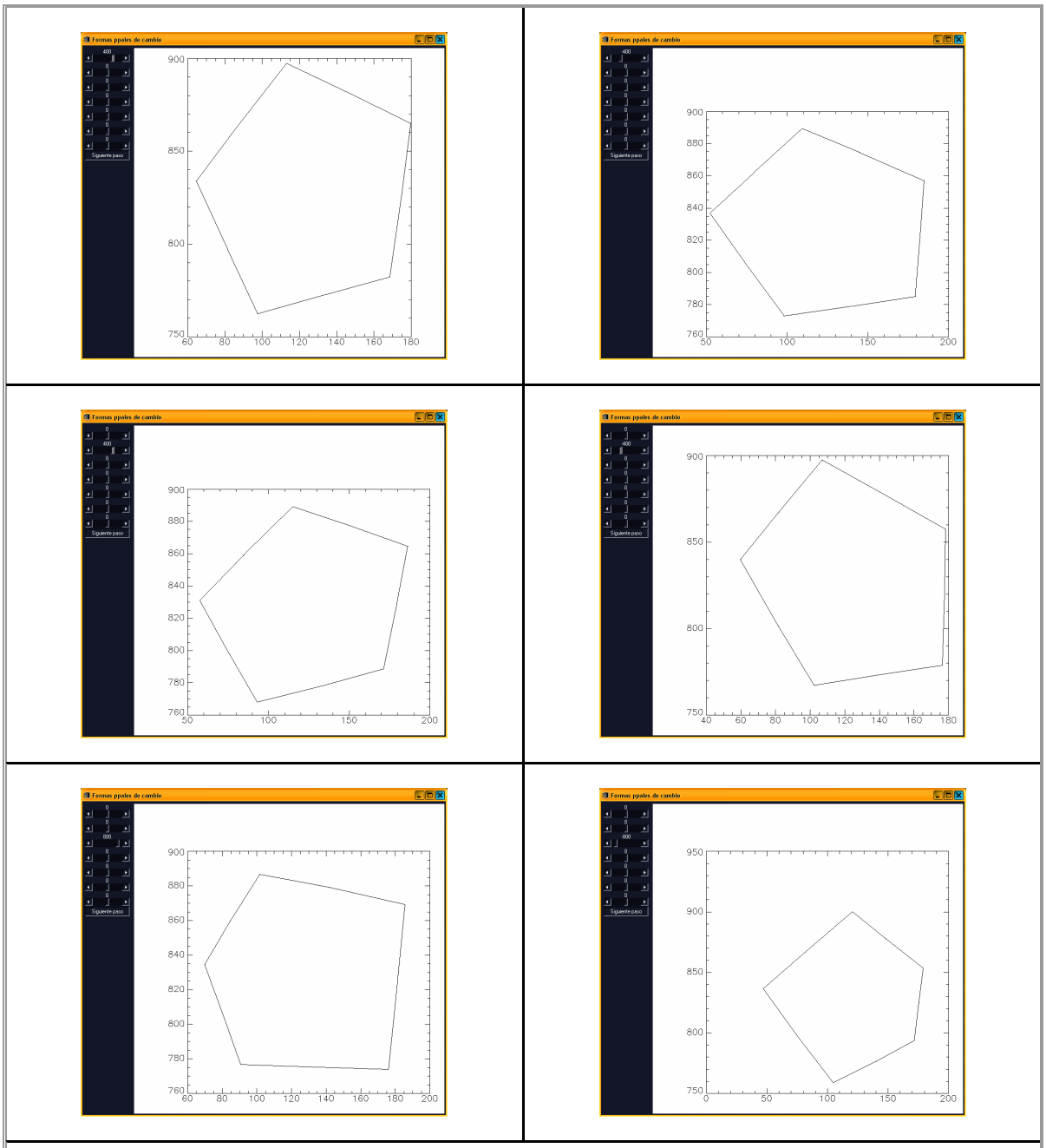
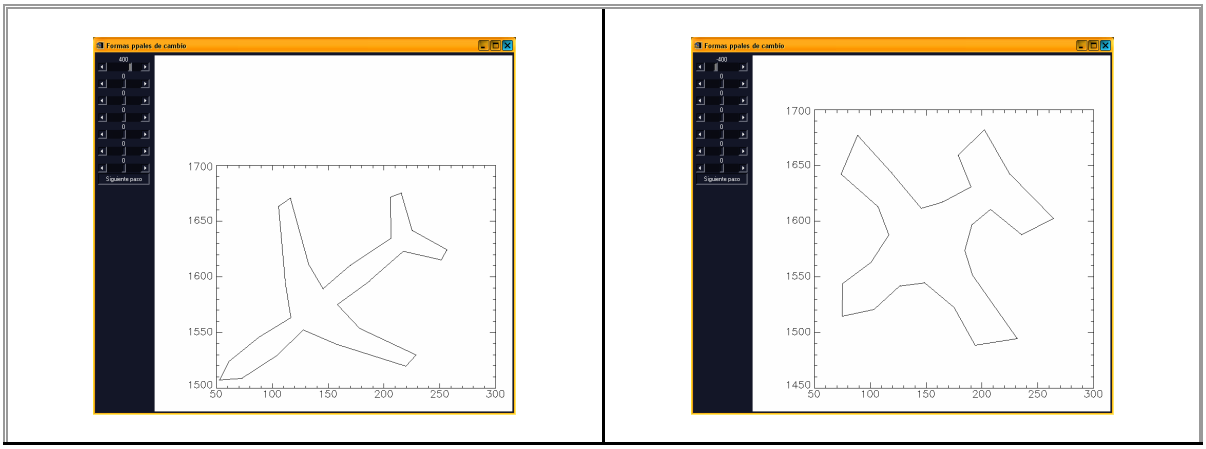


Figura 90. Secuencia de pentágonos

Y en el caso de los aviones:



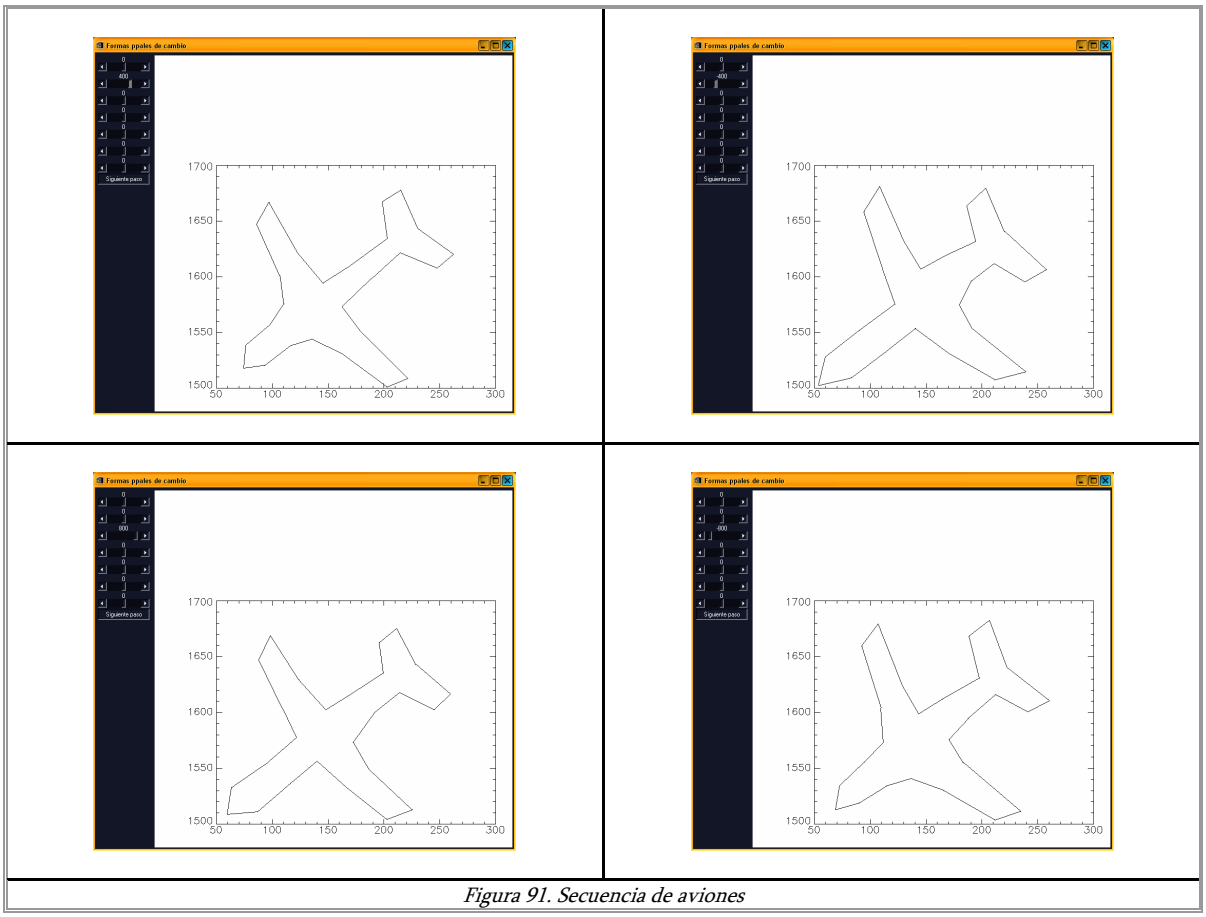


Figura 91. Secuencia de aviones

Visto lo cual podemos ver que modificando los primeros autovectores podemos encontrar muy diversos modelos de aviones. Acabamos de conseguir el modelo plástico de un pentágono y de un avión. En cuanto a reconocimiento de figuras sería ideal poder encontrar un contorno en la imagen, situar el pentágono o avión medio en ese lugar e ir encontrando dónde se encuentra el contorno correcto de la figura e ir deformando la figura. Si la modificación es excesiva, ese contorno no será el tipo de objeto que buscamos (esto debería recordarnos que, siendo un modo de control de las modificaciones posibles, es un tipo de 'energía interna'). La forma de cifrar si se está modificando mucho la figura sería directa. Dado que se habría realizado la toma de muestras, los autovectores y la figura media sería conocida. Se reolvería el siguiente sistema heredado de la formulación anterior:

$$
\begin{aligned}
& x = x_{media} + P \cdot b \\
& \Downarrow \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{pmatrix}_{media} + \begin{pmatrix} av1_{x1} & av2_{x1} & \cdots & av'2p'_{x1} \\ av1_{y1} & av2_{y1} & \cdots & av'2p'_{y1} \\ av1_{x2} & av2_{x2} & \cdots & av'2p'_{x2} \\ av1_{y2} & av2_{y2} & \cdots & av'2p'_{y2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ av1_{xp} & av2_{xp} & \cdots & av'2p'_{xp} \\ av1_{yp} & av2_{yp} & \cdots & av'2p'_{yp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{av1} \\ b_{av2} \\ \vdots \\ b_{av'2p'} \end{pmatrix} \\
& \Downarrow \\
& \begin{pmatrix} av1_{x1} & av2_{x1} & \cdots & av'2p'_{x1} \\ av1_{y1} & av2_{y1} & \cdots & av'2p'_{y1} \\ av1_{x2} & av2_{x2} & \cdots & av'2p'_{x2} \\ av1_{y2} & av2_{y2} & \cdots & av'2p'_{y2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ av1_{xp} & av2_{xp} & \cdots & av'2p'_{xp} \\ av1_{yp} & av2_{yp} & \cdots & av'2p'_{yp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{av1} \\ b_{av2} \\ \vdots \\ b_{av'2p'} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{pmatrix}_{media} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{pmatrix} \right] = 0 \\
& \Downarrow \\
& A \cdot b - k = 0
\end{aligned}
\qquad (54)
$$

Sistema a resolver por MMC, de modo que las *bs* indicarían el desplazamiento a lo largo del autovector, con un umbral podría cifrarse que si esa *b* implica salirse de los límites del hiperelipsoide en cuestión, ese contorno ha dejado de ser el tipo de figura buscado.

Consideremos que el modelo plástico ha quedado entendido. Lo hemos mostrado en los dos ejemplos típicos, las Componentes Principales de las bandas y la aplicación a los Active Shape Models. La dificultad de aplicar este método en cuanto a figuras es la ubicación en la imagen y la búsqueda para luego testear si el objeto es lo que buscamos. Pero no es nuestro objetivo.

Se ha pretendido mostrar la notación y la teoría que se esconde detrás de la sugerencia de aplicar los CP zonales de la memoria. Tal vez sea una idea compleja para un problema no tan complejo.

11 . BIBLIOGRAFÍA

Libros:

CHUVIECO, E; Fundamentos de Teledetección espacial. Ed. Rialp,1996

GONZALEZ, R. C; WOODS, R. E.; Digital Image Processing. Addison-Wesley publishing company.

THEODORIDIS, S.; KOUTROUMBAS, K.; Pattern Recognition. Ed. Academia Press

FOLEY; VAN DAM; FEINER; HUGHES; Computer graphics, principles and practice. Addison-Wesley publishing company.

Revistas:

SHRESTHA,R.L.; CARTER, W.E.; Airborne Laser Swath Mapping: Quantifying changes in sandy beaches over time scales of weeks to years. IRPS journal of Photogrammety & Remote Sensing, vol59, pags. 222-232

Artículos Internet:

[1] ALESHEIKH, A.; GHORBANALI, A.; *Generation the coastline change map for Urmia Lake by TM and ETM+ imagery*. GIS development. Conference Asia 2004.

[2] JOHANSON, M.; ASTRANDT, B.; *Classification of crops segmented by Active Shape Models.* School of information science, computer and electrical engineering, Halmstadt Universityt.

[3] COOTES, T. F.; TAYLOR, C. J.; COOPER, D. H.; GRAHAM, J.; *Active shape models-their training and application*. Department Computer Vision and Image Understanding, 61(1): 38-59, January 1995.

[4] IGLESIAS, A.; COTOS, J.M.; TRIÑANES, J.A.; HERNÁNDEZ, C.; *Método para la elaboración de mapas representativos del pasado hidrobiológico de aguas oceánicas usando imágenes de la seria NOAA a partir de filtros paso-alto*. Revista de la asociación española de teledetección nº9, 1998.

[5] ZHA, X.; *Remote Sensing Monitoring of Coastline Change in Pearl River Estuary*. Proc. ACRS 2001. 22nd Asian Conference on Remote Sensing. Singapore. Vol. 2. pp. 1362-1366

[6] SHEIFENG, h; JIREN, L.; MEI, X; *The dynamic remote sensing monitorin of eight outlets in peral river estuary*. ACRS 2002. 22nd Asian Conference on Remote Sensing. Katmandú. Poster del 4º día de la exposición.

[7] BAYRAM, A.; BAYRAKTAR, H.; HELVACI, C.; ACAR, U.; Coast line change detection using Corona, Spot and IRS 1D Images. ISPRS, XXth ISPRS Congress. Pg. 437

[8] HANSON, H.; *Overview of beach nourishment in the european union projects, practices and objectives*. SHORE AND BEACH, 2003 Vol. 71 Núm. PART_2, pg9.

[9] ARMENAKIS, C.; LEDUC, F.; CYR, I.; SAVOPOL, F.; CAVAYAS, F.; *A comparative analysis of scanned maps and imagery for mapping applications.* IRPS journal of Photogrammety & Remote Sensing No. 5-6, April 2003, pp. 304-314

[10] GRIGGS, G. B.; *The impacts of coastal armoring.* Shore and Beach, Vol. 73 nº1.

[11] GREG HARON, P. E.; BILL HUMPHREYS, M. P. *A. Cost effective shoreline monitoring in a small California coastal comunita: the san clemente experience.* SHORE AND BEACH. 2004, VOL 72; NUMB 3, pages 26-31

[12] KAHRAMON, M.; GUMUSTEKIN, S.; *Matching of aerial coastline images with map data using dynamic programming.* EUSIPCO, European Signal Processing Conference 2006 September 4-8, Florence.

[13] HEENE, G.; GAUTAMA, S.; *Optimisation of a coastline extraction algorithm for object-oriented matching of multisensor satellite imagery.* Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2000. Proceedings. IGARSS 2000. IEEE 2000 International Volume 6, Issue , 2000 Page(s):2632 - 2634 vol.6

[14] GIORDAN, F.; DELLEPIANE, S.; DE LAURENTIS, R.; *Coastline extraction in remotely sensed images.* Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2001. IGARSS apos;01. IEEE 2001 InternationalVolume 3, Issue , 2001 Page(s):1493 - 1495 vol.3

[15] ALESHEIKH, A.; GHORBANALI, A.; NOURI, N.; *Coastline change detection using remote sensing.* International Journal of Environmental Science and Technology. Volume 4, Number 1, Winter 2007, Article 8

[16] FERRERO, S.B.; PALACIO, M. G.; *Análisis de componentes principales en teledetección. Consideraciones estadísticas para optimizar su interpretación.* Asociación Española de Teledetección, Revista 17, artículo 5.

[17] GREGORICH, D.; AUMAN, H. H; *Verification of AIRS boresight accuracy using coastline detection.* Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on Volume 41, Issue 2, Feb. 2003 Page(s): 298 - 302

[19] BAGLI, S.; SALILLE, P.; *Morphological automatic extraction of pan-european coastline from landsat ETM+ images.* COASTGIS03 Fifth international symposium on GIS and computer cartography for coastal zone management. Integrating information in coastal zone management. Genova 16-18 october 2003

[20] PEDRO W.M. SOUZA-FILHO; WALDIR R. PASADELLA; *Use of synthetic aperture radar for recognition of coastal geomorphological features, land-use assessment and shoreline changes in Bragança, coast-Pará, northern Brazil.* Anais da Academia Brasileira de Ciências 75(3): 341-356.

[21] BO G.; DELLEPIANE; LAURENTIS, R.; *Semiautomatic coastline detection in remotely sensed images.* Geosciencie and Remote Sensing Symposium, 2000. Proceedings. IGARSS 2000. IEEE 2000 International 2000Volume: 5, On page(s): 1869-1871 vol.5

[22] SESLI, F. A.; KARSLI, F.; AKYOL, N.; *Monitoring coastal land use changes using digital photogrammetry: case study of black sea coast of Trabzon, Turkey.* XXIII InternationalFIG Congreso INTERGEO, 8-13 October 2006. Munich, Germany

[23] YANLI, T.; *The application of GIS and RS for Coastline Change Detection and Risk Assessment to enhanced sea level rise.* International Institute for Geo-Information Science and Herat Observation. Tesis doctoral

[24] HUAGUO, Z.; DONGLING, L.; QUINMEL, X.; BIN, F.; JINGSONG, Y.; AIQING, S.; XIULIN, L.; CHANGBAO, Z.; WEIGEN, H.; *The remote sensing studies on coastal zone and islands in China by using ikonos satellite images.* Asian asociation of remote sensing. ACRS2002. OCN02-2.