UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Geodésica, Cartográfica y Topográfica

---

Trabajo final de carrera Ingeniería Superior en Cartografía y Geodesia

"Desarrollo de una herramienta analítica para la proyección de un fotograma terrestre sobre un plano georreferenciado. Aplicación en trabajos de monitorización de línea de costa"

Elaborada por: Elena Sánchez García

Dirigida por: Jaime Almonacid Caballer, Josep Eliseu Pardo Pascual y Ángel Balaguer Beser

21 de Octubre de 2013

A mis queridos padres, Jose y Loli, y a mi hermana Alba, por lo que los filósofos dicen que es un imposible, un absoluto,... por absolutamente todo.

AGRADECIMIENTOS

El presente escrito podría ser visto como una continuación de cinco años de incesante trabajo o como la culminación de los mismos, y sin embargo, el *Final* sólo alcanzo a verlo apuntando tímidamente, a lo lejos. Sé que ésta será una nueva etapa, no menos compleja y dura que la anterior, ni tampoco menos enriquecedora y estimulante, y este proyecto es el inicio de la misma. Son muchas las personas que han colaborado con su ayuda, haciendo real este proyecto, y a todas les estoy muy agradecida. Las deudas intelectuales del proyecto son tan numerosas que sería imposible mencionarlas y, sin embargo, espero haberlas resaltado en las citas y bibliografía.

Quiero agradecer también de forma muy especial a los tutores de este proyecto, Jaime Almonacid Caballer, Dr. Josep Eliseu Pardo Pascual y Dr. Ángel Balaguer Beser por tantas y tan variadas ayudas brindadas para su realización. A Ángel, por haber sido un formidable referente en mi formación y por su constante y siempre amable ayuda desde que lo conocí como profesor de Álgebra. Él me presentó al equipo CGAT-UPV y siempre confió en mi trabajo.

A Josep, que ha hecho las veces de maestro, principalmente con aportaciones muy agudas y haciéndome partícipe de interesantes observaciones. A ambos por el interés y aliento mostrado por mi trabajo, lo cual ha sido siempre un estímulo y halago.

A Jaime, porque se ha volcado conmigo, desinteresadamente y aun cuando tenía tantísimas cosas que hacer; me ha enseñado más de lo que cree, se ha preocupado por mí y siempre ha intentado que estuviese cómoda y confiase en mí; más que un compañero es un amigo; gracias de verdad, Jaime.

Al resto de doctorandos, y miembros del equipo, José Luis Gil Yepes, al Dr. Txomin Hermosilla Gómez y al Dr. Jesús Manuel Palomar Vázquez, gracias por proporcionarme información propia inédita, por vuestro apoyo, tiempo y paciencia, y vuestra revisión crítica.

A otros muchos con los que he trabajado a lo largo de mi carrera y que me han aportado interesantes conocimientos para mi formación.

Qué duda cabe que el sacrificio mayor, callado y algo inconsciente, realizado para llegar a la culminación de este proyecto ha sido el de mi familia, preferentemente mis padres, y mi hermana Alba. Glosar su contribución se convertiría en un apartado de agradecimientos mucho más extenso todavía, y únicamente puedo dedicarles la presente memoria, con todo el sentimiento. Por entenderme, aguantar mi mal genio, darme ánimos, y hacerme sonreír; gracias. A ti Alba, gracias por acompañarme en este largo camino y nunca dejar que me diese por vencida.

Por último dedico este escrito, con gran cariño y humildad, a todos aquellos que, en medio de las condiciones más adversas, continúan desarrollando una práctica intelectual que contribuye a repensar y rediseñar los mundos actuales, más allá de los procesos tan destructivos y violentos a que están sometidos hoy en día.

A todos, gracias.

ÍNDICE

RESUMEN

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Situación actual y justificación 6

1.2. Bases del proyecto 9

1.3. Objetivos 10

2. DATOS UTILIZADOS PARA EL TRABAJO

2.1. Zona de estudio 12

2.2. Datos de partida y trabajo de campo 16

2.2.1. Toma de puntos del perfil de la playa con GPS 17

2.2.2. Toma de puntos de control mediante GPS 19

2.2.3. Toma de la línea de costa GPS 21

2.2.4. Toma de la imagen fotográfica 23

2.2.5. Imagen Landsat 25

3. METODOLOGIA

3.1. Introducción 27

3.2. Software empleado 31

3.3. Preprocesado de los datos 32

3.4. Análisis matemático 34

3.4.1. Calibración de la cámara y corrección de la fotografía 34

3.4.2. Obtención parámetros TLD mediante resección espacial de una única imagen fotográfica. 38

3.4.3. Relación entre parámetros de orientación externa y parámetros TLD. 40

3.4.4. Refinamiento de los parámetros de orientación externa. 43

3.4.5. Método alternativo de Church para el cálculo de los parámetros de orientación externa. 47

3.4.6. Constreñimiento para la línea de horizonte. 50

3.4.6.1. Corrección de esfericidad terrestre. 56

3.4.7. Proyección espacial..... 60

3.4.7.1. Remuestreo de la imagen..... 61

4. PROGRAMACIÓN Y APLICACIÓN

4.1. Calibración de la cámara y corrección de la fotografía..... 63

4.2. Casos sintéticos..... 69

4.2.1. Primer escenario..... 69

4.2.2. Segundo escenario..... 86

4.3. Casos reales 94

4.3.1. Zona sur 94

4.3.2. Zona norte 117

5. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

5.1. Línea de costa proyectada vs línea GPS..... 127

5.2. Línea GPS vs línea Landsat..... 135

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

ANEJOS

Anejo 1 143

Anejo 2 144

Anejo 3 146

Anejo 4..... 149

Desarrollo de una herramienta analítica para la proyección de un fotograma terrestre sobre un plano georreferenciado. Aplicación en trabajos de monitorización de línea de costa.

Sánchez García, Elena

RESUMEN

El presente trabajo consiste en el desarrollo de una aplicación semi automática realizada con el software Matlab, que proyecte una fotografía terrestre cualquiera sobre un plano dotado de coordenadas. El estudio se inscribe dentro de un proyecto de investigación en que lleva trabajando el grupo CGAT varios años y siendo uno de sus principales objetivos el desarrollo de un método de estudio que permita extraer la posición de la línea de costa partiendo de imágenes Landsat. En ese contexto, la herramienta a realizar permitirá obtener la línea de costa georreferenciada en el momento en que fue tomada la fotografía (lo más coincidente en el tiempo como sea posible con el paso del satélite Landsat), pudiendo así analizar aquello que la resolución de éste no ha permitido hasta el momento y contrastar los resultados. Este trabajo inicia el camino para poder realizar una videomonitorización de segmentos sensibles de costa, en este caso se automatiza para una zona de la playa del Saler (litoral valenciano), del mismo modo que se realiza ya en costas catalanas y baleares.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Situación actual y justificación

En el marco de un proyecto que pretende analizar sistemática y objetivamente la evolución del paisaje litoral de Valencia en los últimos dos siglos, la línea de investigación esbozada se centra en la construcción de una herramienta que permita conocer de forma fácil, rápida y eficaz, el análisis del cambio costero en un conjunto de playas seleccionadas del litoral valenciano.

Quizá, la justificación más inmediata al proyecto es la inherente problemática a la línea de costa; esto es, lo necesario de establecer las tasas de erosión o acreción sufridas durante un intervalo de tiempo acotado, el análisis de los factores condicionantes, y la evaluación de las consecuencias tanto ambientales como socioeconómicas de los cambios.

Los cambios costeros se califican como problemáticos cuando comportan un conjunto de implicaciones negativas sobre los recursos y usos propios del espacio litoral, de modo que puedan afectar a los intereses socioeconómicos y a los valores naturales. Estudios retrospectivos que pretendan el análisis tendencial y evolutivo de las costas, pueden resultar de gran importancia para afrontar competentemente una inminente amenaza de cambio climático, estimándose una subida media del nivel del mar para finales del siglo XXI de entre 19 y 59 cm (IPCC, 2007).

Intentar modelizar la respuesta del litoral frente a los efectos del oleaje y de la variación del nivel del mar, sobretodo en costas significativamente inestables como son las sedimentarias, permitirá evaluar el retroceso costero y migración de la línea de costa hacia el continente en escalas de tiempo amplias. Sin embargo, lo complejo de los fenómenos y procesos que interactúan sobre la interfaz tierra-mar, hacen que se trate de un evento oscilante produciéndose tanto avances como retrocesos en la posición de esta línea.

El límite tierra emergida-sumergida, varía en función de la posición del nivel de mar y de la forma del perfil de la playa que va siendo modelado por el oleaje incidente, siendo sumamente cambiante. Así pues, por tratarse la playa de un espacio profundamente dinámico en su forma y disposición, es necesario discernir entre los cambios que obedecen a factores relacionados con procesos meteorológicos –con ritmos estacionales u oscilantes a lo largo del año o de un comportamiento más aleatorio- de aquellos que manifiestan una tendencia de cambio progresivo o continuado perdurable en el tiempo.

Los primeros se producen a corto plazo (1-2 años), y en la mayoría de los casos, de su análisis se deducen variaciones de carácter oscilante. Son fruto de cada uno de los temporales, y permiten reconocer el funcionamiento habitual del sistema costero, es decir, la respuesta morfológica que las playas y los distintos elementos que las componen presentan frente a la acción de las olas. El desequilibrio de masas que origina los diferentes tipos de rompientes cuando las olas disipan su energía en el área costera, se verifica en el enorme desgaste y removilización de sedimentos a que las playas se ven sometidas. Así pues, estas zonas conforman sistemas flexibles capaces de adaptarse a situaciones energéticas cambiantes por modificación natural de su morfología.

En lo referente a cambios progresivos o persistentes en el tiempo, y prolongando el análisis sobre periodos mucho más largos (decenas de años), en algunos casos se aprecia la

existencia de tendencias evolutivas asociadas a cambios en la disponibilidad de sedimento en las playas, lo cual implicará erosión (pérdida de anchura de playa) o acumulación (ganancia). Dentro de los cambios que sean resultado de movilizaciones sucesivas en un sentido predominante, pueden citarse tres tipos fundamentales clasificados en función de la escala de afección (Pardo *et al*., 2008b):

I. Alteraciones locales y rápidas del aporte sedimentario en el sistema litoral, causadas por la interposición de obstáculos artificiales (espigones, puertos, etc.) al transporte longitudinal de sedimentos. Suponen un marcado efecto de avance o retroceso de la línea de costa evaluable mediante estudios evolutivos.

II. Alteraciones a escala regional y largo plazo que se deben a cambios en el régimen de llegada de los aportes sedimentarios (retención de sedimentos fluviales por los embalses). No están relacionadas con la mediación antrópica directa, y su efecto se percibe sobre áreas amplias, en espacios de tiempo considerables.

III. Alteraciones ligadas a variaciones globales del nivel marino a una escala de millones de años, cuyo efecto parece acelerarse por efecto del cambio climático global. Implicaría cambios generales.

La seguridad y coherencia en la gestión y toma de decisiones correctas que afecten a la ordenación del litoral se complica por la confluencia de distintos procesos y la dificultad de su análisis. Por ello, conocer y cuantificar estas tendencias es fundamental para advertir su magnitud y causas, y poder ofrecer soluciones reales. Para detallar las modalidades de cambios que se dan en el sector costero objeto de estudio y deducir las causas que los explican, será necesario un análisis evolutivo a distintas escalas espaciales y temporales y con un grado de precisión adecuado.

Según la problemática expuesta, se evidencia la importancia de ahondar, a distintos niveles, en el análisis evolutivo de un paisaje tan voluble geomorfológicamente como lo es el sector costero; y a este respecto, los avances técnicos juegan un papel decisivo en tanto que permitan detectar y analizar la magnitud de los cambios con precisión y efectividad.

Durante años, se adolecía de una metodología específica y válida que facilitase la ardua tarea del trazado de la línea de costa, obviando las hasta ahora limitaciones técnicas y evitando la asunción de simplificaciones fútiles.

El avance en los métodos de adquisición de datos topográficos, ofrece nuevas herramientas para la extracción automatizada y precisa de la línea de costa, llevando a cabo trabajos de monitorización o seguimiento de perfiles de playa en distintos momentos.

Para el análisis de los cambios, ha sido decisiva la mejora de los sistemas de posicionamiento global en modo cinemático en tiempo real (GPS-RTK), LIDAR (*Light Detection*

and Ranging) y láser escáner terrestre. Más aún, además de la documentación cartográfica básica (fotografías aéreas, ortofotografías, imágenes de satélite…), desde abril de 2008 el USGS ha abierto su base de datos de imágenes Landsat que pueden ser empleadas por cualquier usuario identificado, obteniéndolas de un servidor dispuesto para ello. Dada la frecuencia de paso de satélite por un mismo lugar, que lleva en funcionamiento desde marzo de 1984 y que cubre todo el planeta, esta es, sin duda, la principal base de datos territorial a nivel de imagen disponible en el mundo, suponiendo una auténtica revolución en cuanto a disponibilidad de información de la superficie terrestre. Los Sistemas de Información Geográfica se muestran como la herramienta más eficaz para llevar a cabo las tareas de gestión y análisis de los datos necesarios para realizar dichas modelizaciones.

Por otro lado, trabajos de monitorización de costa ya existentes como el sistema ARGUS (Guillén y Ojeda, 2008) permiten registrar de forma sistemática y continua de las diferentes actuaciones que tienen lugar en un segmento de litoral concreto.

En este marco contextual, el trabajo que a continuación se expone, constituye una solución metodológica adoptada por el equipo de investigadores CGAT-UPV, para la monitorización geomorfológica real de un segmento de costa con *software* propio. El método presentado incluirá las premisas geométricas que conlleva el relacionar las coordenadas de una imagen con las coordenadas terreno, esto es, un complejo compendio de principios fotogramétricos.

De este modo se espera poder monitorizar un segmento de costa de forma rápida y eficaz, así como evaluar y contrastar las líneas de costa obtenidas con imágenes Landsat y según el algoritmo ya desarrollado por el grupo CGAT; soluciones metodológicas adoptadas para asegurar un nivel de precisión suficiente y resolver las limitaciones del espacio concreto. Para más información sobre la estrategia de trabajo seguida, consultar la bibliografía de referencia (Pardo *et al*., 2008a).

1.2. Bases del proyecto

Se presenta a continuación el Proyecto Técnico desarrollado en el curso académico 2012-2013, dentro de la Ingeniería Superior en Geodesia y Cartografía de la Universidad Politécnica de Valencia.

Dicho trabajo, dirigido por Jaime Almonacid Caballer[1], Josep Eliseu Pardo Pascual[1] y Ángel Balaguer Beser[2], se inscribe dentro de un proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación para el estudio y caracterización de los cambios morfosedimentarios en las playas y dunas costeras del mediterráneo español mediante el empleo de nuevas técnicas de información geográfica (CGL2009-14220-C02-01), siendo uno de sus principales objetivos el desarrollo de un método de estudio que permitiese extraer la posición de la línea de costa partiendo de imágenes Landsat (TM y ETM+) cuyo nivel de precisión esté cifrado con un EMC de aproximadamente 5 m calibrado en sectores rigidizados.

Así pues, y dentro del marco de actuación del grupo de investigación de Cartografía GeoAmbiental y Teledetección, el presente proyecto pretende generar una herramienta que obtenga la posición de la línea de costa georreferenciada a partir de una mera fotografía realizada con una cámara normal de nivel usuario. Esto permitirá el seguimiento de sectores costeros puntuales de forma eficaz con la única limitación de ir in situ a tomar la fotografía y un mínimo de tres puntos de apoyo.

1.3. Objetivos

La principal finalidad para la que se realizan muchos de los estudios en torno a la evolución de las zonas costeras es la de obtener una visión general de su estado para posteriormente predecir y determinar futuras actuaciones en el marco de una buena planificación del espacio litoral, por ser significativas las consecuencias que tanto en el ámbito natural como social se producen.

Por todo ello, en el presente estudio se pretende generar una herramienta que de forma sencilla nos permita recrear la posición de la línea de costa en un instante concreto en que se realizó la toma fotográfica. De este modo, con series temporales de fotografías se podrá analizar y cuantificar la evolución de un sector costero. Los objetivos se exponen a continuación:

Objetivo principal 1: establecer un proceso metodológico robusto que permita de forma automática la proyección sobre un plano georreferenciado de una fotografía terrestre de un sector de playa.

[1] Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría, E.T.S.I. Geodésica, Cartográfica y Topográfica, Universidad Politécnica de Valencia, 46022, Valencia, España.
[2] Departamento de Matemática Aplicada, E.T.S.I. Geodésica, Cartográfica y Topográfica, Universidad Politécnica de Valencia, 46022, Valencia, España.

a. *Subobjetivo*: Calibrar la cámara y corrección de la fotografía de posibles distorsiones, recrear el momento de la toma, establecer la relación entre el espacio objeto tridimensional y el espacio imagen 2D, obtención de la fotografía proyectada dotada de coordenadas terreno y, detección de la línea de costa.

Objetivo principal 2: Evaluar el potencial y la precisión de la línea de costa obtenida con la fotografía proyectada comparando con una línea de costa medida con GPS en un instante de tiempo muy próximo.

a. *Subobjetivo:* Una vez testeada la precisión de la línea proyectada, se comparará con las líneas de costa extraídas de Landsat a partir del método desarrollado por el equipo CGAT-UPV, para analizar si estas últimas presentan un nivel de calidad apto para el análisis tendencial y evolutivo de las playas, ya que las líneas Landsat nos permitirán un mayor alcance de todo el litoral.

2. DATOS UTILIZADOS PARA EL TRABAJO

2.1. Zona de estudio

De acuerdo con lo expuesto hasta el momento, es necesaria la descriptiva del área de estudio. Se corresponde con una franja litoral de 600m de longitud, al sur del Puerto de Valencia y de la desembocadura del Río Turia, concerniente a la zona del Saler (coordenadas UTM 730124.352, 4363965.868 y 730256.115, 4363391.192 m del huso 30; según el sistema de referencia ETRS89). En la Playa de Pinedo donde predomina la costa baja y arenosa a lo largo de una amplia restinga que se extiende hacia el sur por las playas del Saler y la Devesa. El relieve y acarreo del río Turia, es responsable de una morfología de suave contorno, baja, con marismas, dunas, y albuferas.

Desde una perspectiva geomorfológica, esta franja litoral forma parte de la barra arenosa que cerró el golfo de Valencia convirtiéndolo en albufera y, a diferencia de lo que ocurre en el resto de playas estudiadas, tras la misma aparece un amplio campo dunar cuya formación fue subsiguiente al relleno del área con aluviones cuaternarios.

En cualquier caso, se trata de playas arenosas de tipología muy similar y que constituyen un medio topográficamente bastante homogéneo aunque de anchura variable, por ser éste un parámetro sumamente cambiante.

La extensión de estas playas ha ido variando constantemente a lo largo del tiempo debido a **factores naturales** y **antrópicos**, mayoritariamente siguiendo una tendencia recesiva de pérdida de arena.

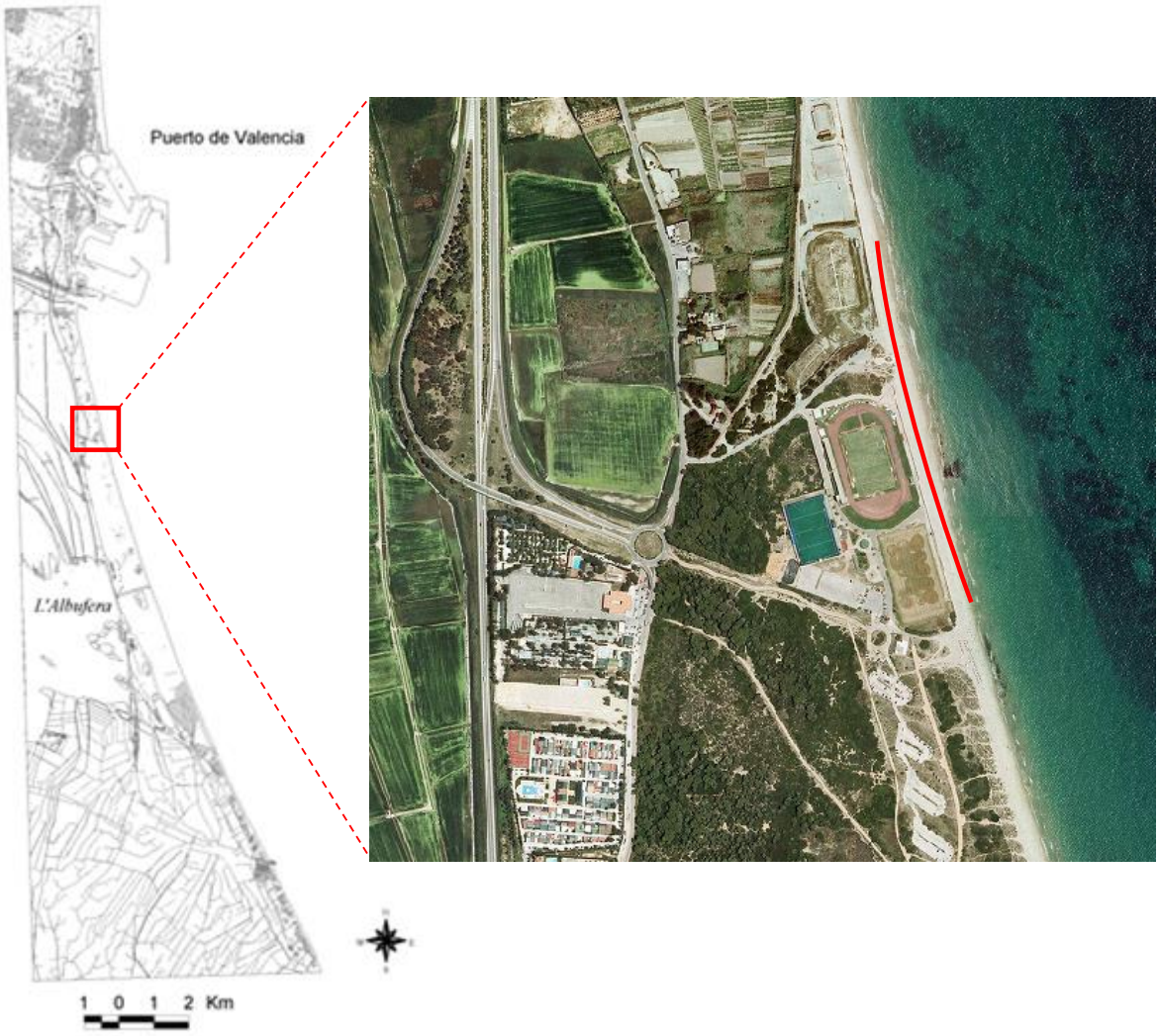


Figura 1: Se muestra el perfil de la playa que se pretende evaluar con dos tomas fotográficas, una hacia el norte y otra hacia el sur. Todo el sector además será medido con técnicas de alta precisión (GPS). Se corresponde con el inicio de la playa del Saler de aproximadamente 600 m de longitud (Imagen izquierda modificada de Pardo *et al.*, 2008c).

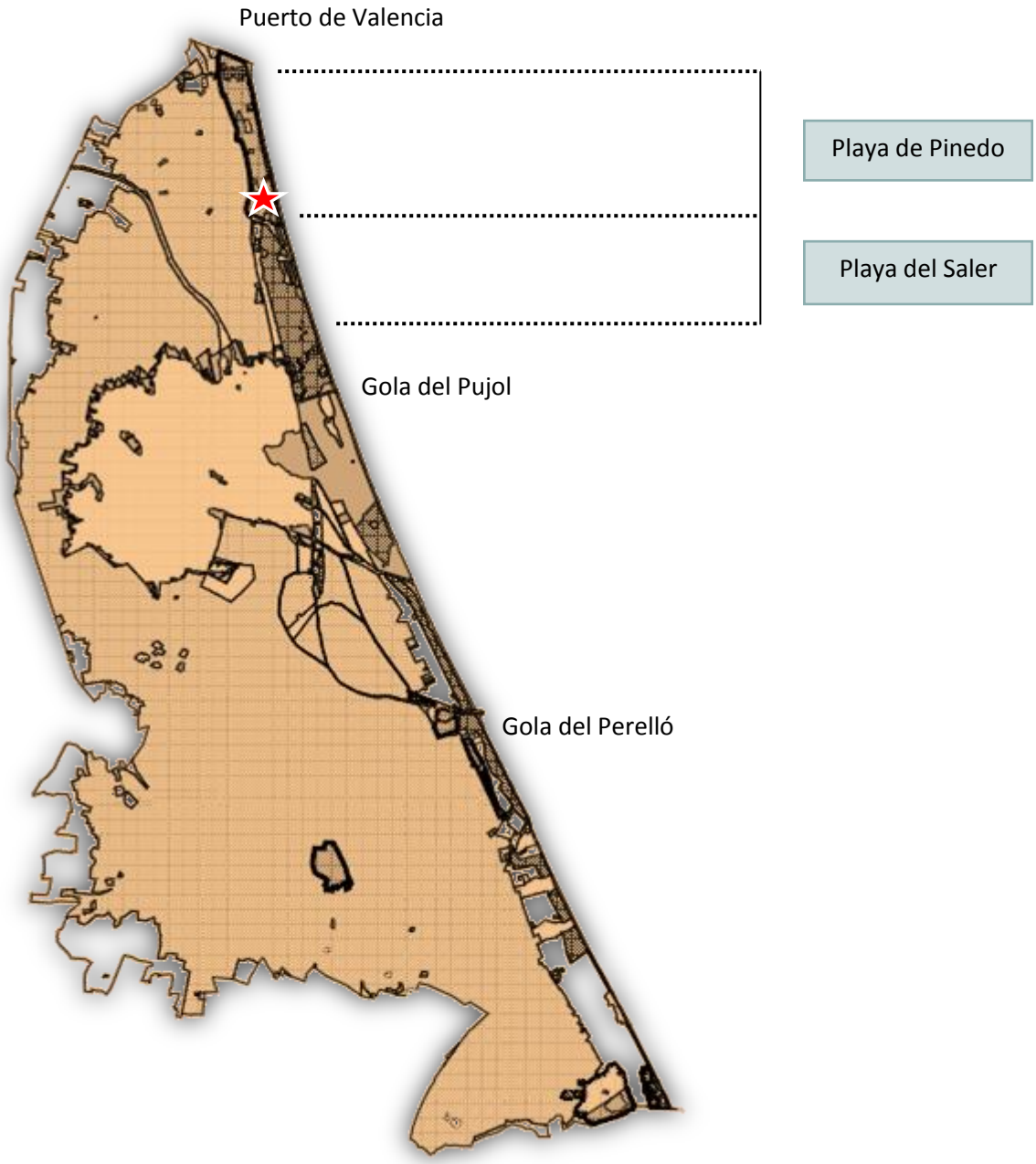


Figura 2: Esquema de la zona de estudio con la toponimia de los elementos costeros que la caracterizan: diferentes sectores de playa, tres canales que comunican la albufera con el mar Mediterráneo y, el puerto de Valencia.

Los factores naturales trascendentes que operan en la dinámica litoral son la deriva litoral y los aportes sedimentarios de los sistemas fluviales. En cuanto a las condiciones climáticas, y al igual que en el resto de las costas valencianas y buena parte del litoral mediterráneo, la zona se encuentra en un ámbito micromareal (el rango máximo es de unos 15 cm), donde los principales vientos actuantes son los de levante, en sus componentes norte y sur. Debido a la orientación NW-SE de este sector costero, la deriva litoral norte-sur predominante en todo el Golfo de Valencia se ve invertida en ocasiones, cuando el oleaje más enérgico procede de direcciones E o ESE.

En estas costas sedimentarias micromareales, el transporte sólido litoral mantiene la tendencia de todo el Mediterráneo, siendo efectivo en dirección sur, y el río Turia, de escaso caudal, es el principal procurador de materiales para su posterior redistribución (así mismo, recordar los tres canales antes mencionados).

Los factores humanos han sido decisivos para la configuración actual de la costa, por el gran número de intervenciones realizadas. La regulación de los caudales fluviales mediante la construcción de presas y esclusas junto con la modificación antrópica de la línea de costa ha provocado una alteración de la dinámica litoral manifiesta en los tramos de costa estudiados.

De este modo, en cuanto a la evolución de la costa y en un marco general de penuria sedimentaria y tendencia recesiva (relacionada claramente con las modificaciones en las estructuras portuarias situadas al norte y la reducción considerable de los aportes), antiguas costas de acumulación han pasado a ser actualmente zonas bajo el predominio de los procesos erosivos donde escasas veces se mantiene el equilibrio en el balance sedimentario.

No cabe duda que la existencia de obras de abrigo ha condicionado la evolución de las playas estudiadas por aumentar el nivel de barrera al transporte sólido litoral y cristalizar la dinámica natural del entorno. Sin embargo, además de la modificación de las condiciones de contorno de las playas y el proceso erosivo que afecta a la línea de costa, para una mayor compresión de los resultados obtenidos en el presente proyecto, habrá que considerar actuaciones a un nivel más local, que igualmente puedan comprometer la dinámica del sistema. El asolamiento del campo dunar que existía en la playa del Saler es un buen ejemplo, pues con la restauración de las dunas litorales se contribuye a mantener el equilibrio sedimentario costero, al tiempo que constituyen una reserva de arena esencial para minimizar los efectos erosivos y de retroceso en la línea de playa. Por otra parte, infraestructuras tales como el paseo marítimo impiden la disipación de la energía del oleaje aumentando su efecto de arrastre en una playa ya de escasas dimensiones y de nulo o escaso aporte de arena.

Las principales actuaciones se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 1: Efectos que sobre el entorno costero-litoral tendrán las actuaciones que se muestran ordenadas cronológicamente.

Cronología	Actuaciones	Efectos
Final años 60	Se inicia un proceso de urbanización en la Devesa y áreas limítrofes.	Alteración grave de los ecosistemas: - Cordón dunar exterior arrasado casi en su totalidad. - Depresiones interdunares cegadas con arena y repobladas con eucaliptos. - Alineación dunar interior fragmentada con la construcción de carreteras, edificios e infraestructuras hidráulicas y eléctricas. - Las Playas entran en regresión erosiva.
	Concluyen las obras de desvío del río Turia (Plan Sur).	Desaparición de los aportes áridos del río.
1983	El Ayto de Valencia aprueba el *Plan Especial de Protección y Reforma Interior del Monte de la Devesa del Saler*	Instrumento jurídico base en el principio de la recuperación de los ecosistemas.
1986	La Devesa forma parte del Parque Natural de la Albufera de Valencia y se crea la Oficina Técnica Devesa-Albufera (OTDA) y los Viveros Municipales del Saler (VV.MM.).	Se paraliza el proceso de destrucción del medio natural por la urbanización. Actuaciones regenerativas para recuperar los ecosistemas más degradados y preservar los mejor conservados.
2002	Se inicia el proyecto LIFE	Recuperación y planificación espacial - Restauración de hábitats dunares - Eliminación del paseo - Vertidos de arenas y redistribución de los perfiles costeros - Eliminación de infraestructuras y construcciones obsoletas
	Sucesivas ampliaciones del Puerto de Valencia hasta el Plan Estratégico 2002-2015.	Trampa de sedimentos por efecto de obstáculo. Progresión de las playas al norte de la desembocadura del río Turia y fuerte retroceso al sur. Degradación del área.

Así pues, las actuaciones directas sobre la costa han alterado el equilibrio en el sistema litoral provocando respuestas rápidas que, a su vez, han generado nuevas actuaciones tratando de restablecer el equilibrio anterior. En un medio tan frágil, parece muy aconsejable el evaluar las consecuencias de un aumento en los efectos de la onda erosiva que parece propagarse hacia el sur, y he aquí lo necesario del presente proyecto en un contexto en que la reversión del proceso erosivo parece complicarse por momentos.

2.2. Datos de partida y trabajo de campo

La toma de datos en campo necesaria para el desarrollo del algoritmo de proyección, se efectuó siguiendo un trabajo riguroso en campo y posibilitando un análisis comparativo posterior con una línea de costa obtenida de una imagen Landsat 8. Para ello, la toma de datos en campo se realizó de forma lo más instantánea y coincidente posible con el paso del satélite

para su calibración y análisis. Así mismo también se tomó una línea de costa de alta precisión con GPS para que sirviese como comprobación de calidad del producto obtenido tras el desarrollo de este proyecto.

El 11 de febrero de 2013 se lanzó el satélite Landsat 8. Este producto es continuación directa del sensor Landsat 5, ya fuera de servicio, si no se tiene en cuenta el Landsat 7, afectado de un error de bandeado. El satélite Landsat 8 es la nueva herramienta potencial para la obtención de costa tal y como se ha estado desarrollando recientemente (Pardo *et al*., 2012) y a lo largo de toda la tesis de Jaime Almonacid (Almonacid., 2014), miembro del grupo CGAT.

Se ha observado que cada escena de Landsat 8 es publicada con procesamiento completo nivel L1t a las 24 horas de su toma. Como consecuencia se puede prever cuando será la siguiente escena pudiendo así tomar datos de campo de forma simultánea al paso del propio satélite.

Una vez confirmado el día y la hora más probable de paso del satélite, se realizará la toma de datos en ese previsto momento. Tales datos serán los que se detallan en los apartados siguientes.

2.2.1. Toma de puntos del perfil de la playa con GPS

El desarrollo de nuevas técnicas de adquisición de información topográfica –sobre todo el empleo de los sistemas de posicionamiento global en modo cinemático en tiempo real (GPS-RTK) con el que se pueden alcanzar precisiones tanto en planimetría como en altimetría superiores a los 3 cm, y LIDAR (Light Detection and Ranging) con precisiones de unos 0,5 -1 m en planimetría y unos 15 cm en altimetría— ha permitido que se comience a utilizar el análisis tridimensional para caracterizar este tipo de cambios en el litoral.

En este contexto, se efectuó la solución metodológica para la monitorización real del segmento de playa analizado en este trabajo utilizando GPS-RTK en el sistema de referencia terrestre WGS84. En cuanto al sistema de referencia de altitudes a utilizar es la cota ortométrica referida al modelo de geoide EGM08-REDNAP y más concretamente al nivel medio del mar medido en el mareógrafo de Alicante.

La trayectoria seguida en la toma de datos consistió en recorrer en forma de zig-zag y de oeste a este el perfil de playa tomando un punto por cada cambio de pendiente significativo y consiguiendo por tanto aproximadamente una media de cinco puntos por cada perfil transversal de playa que oscila en torno a los 40m de franja arenosa.

El último punto de cada perfil se tomó en zona acuática, alejado aproximadamente 1.5 metros de lo que estableceríamos como la línea de costa.

Este trabajo se realizó con el objeto de conocer de forma tridimensional el perfil de playa analizado, así como para poder proyectar posteriormente la imagen fotográfica sobre un Modelo Digital del Terreno salvando los posibles desplazamientos y errores ocasionados por las diferencias en altura tal y como se mostrará en apartados posteriores.

2.2.2. Toma de puntos de control mediante GPS

Para el trabajo de proyección de una imagen fotográfica es necesario disponer de una serie de puntos de control que puedan visualizarse de forma clara y definida en la toma fotográfica. El punto de control ideal sería un elemento singular que permaneciera estático y no fácilmente alterable y la distribución de los mismos debería estar lo mejor repartida posible por el área de trabajo y dispuestos en diferentes planos.

En el litoral dichos elementos característicos pueden ser rocas y vegetación singular, alguna construcción artificial tales como escaleras y muros…entre otros objetos de tipología muy variada en función de la morfología de playa en la que nos encontremos.

Estos puntos serán los que nos permitan establecer un vínculo entre el espacio imagen y el espacio terreno y por ello su correcto establecimiento es uno de los factores más importantes.

Las playas son medios excesivamente homogéneos que no se caracterizan precisamente por disponer de suficientes elementos singulares e inalterables y, en ocasiones, esto podría dificultar el trabajo de proyección de una imagen fotográfica. En estos casos habría que proveerse de elementos externos llamativos tales como macetas, prendas de ropa, cubos… que dieran cierta heterogeneidad a la superficie arenosa y, posicionarlos de forma precisa.

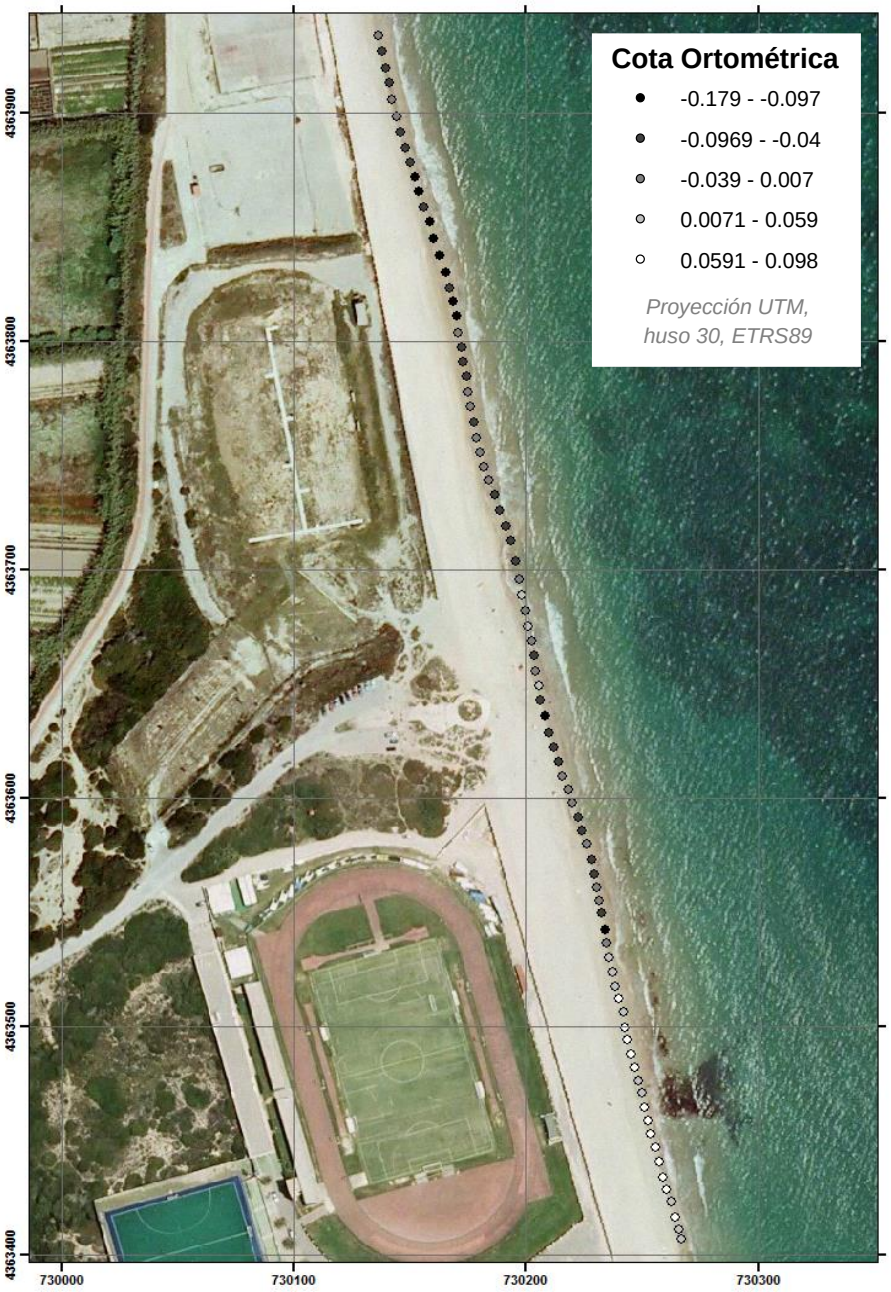
En nuestra playa, pensando que las tomas fotográficas (una en dirección norte y otra hacia el sur) se realizarían desde una estructura elevada ubicada en la parte central del mapa siguiente, los puntos de control se localizaron lo más lejos posible pero siempre valorando que habían de poder ser discriminados en la imagen.

Puntos de Control
Lugar de la toma fotográfica
Proyección UTM, huso 30, ETRS89
4363900
4363800
4363700
4363600
730100
730200

2.2.3. Toma de la línea de costa GPS

Nuevamente con el GPS-RTK se quiso obtener una línea de costa que capturara dicha posición para el mismo día en que se adquirió tanto la imagen de Landsat 8 como la toma fotográfica. De este modo conseguimos una línea de precisión (que no por ello más exacta) generada según un criterio razonado propio ya que el concepto línea de costa puede ser entendido de forma muy diversa (línea de mojado, línea de agua…). Por ello esta línea nos servirá para testear y contrastar las otras líneas de costa obtenidas bien mediante la imagen Landsat o bien mediante la imagen fotográfica proyectada.

La trayectoria seguida no era arbitraria, sino que seguía el criterio de ir barriendo la orilla registrando las coordenadas de un punto cada 7 metros aproximadamente. El criterio establecido consistió en definir la línea de costa a una distancia intermedia entre el máximo vaivén de las olas y la zona donde siempre habrá agua al existir normalmente un cambio de pendiente significativo en la topografía marina. Se podría establecer un error de 0.5 m en la determinación de dicha línea de costa.


Cota Ortométrica
-0.179 - -0.097
-0.0969 - -0.04
-0.039 - 0.007
0.0071 - 0.059
0.0591 - 0.098
Proyección UTM, huso 30, ETRS89
4363900
4363800
4363700
4363600
4363500
4363400
730000
730100
730200
730300

2.2.4. Toma de la imagen fotográfica.

La captura de un segmento de costa concreto se realizó con una cámara convencional de nivel usuario con 12 mega píxeles siendo por tanto el tamaño de la imagen de 4000 x 3000 píxeles, orientada horizontalmente y procurando que la cámara se encontrase lo más estática posible para lo cual se requirió el uso de un trípode. Así mismo, fue imprescindible que la focal de la cámara estuviese fijada al infinito (no uso de zoom) y jugar con la velocidad del disparo sin utilizar el flash.

Para abarcar todo el sector costero de estudio, se realizarán una serie de tomas hacia la parte sureña y otras orientadas hacia el norte. Ambas desde un mirador elevado que se encuentra entre ambas tomas tal y como se observa en el mapa siguiente:

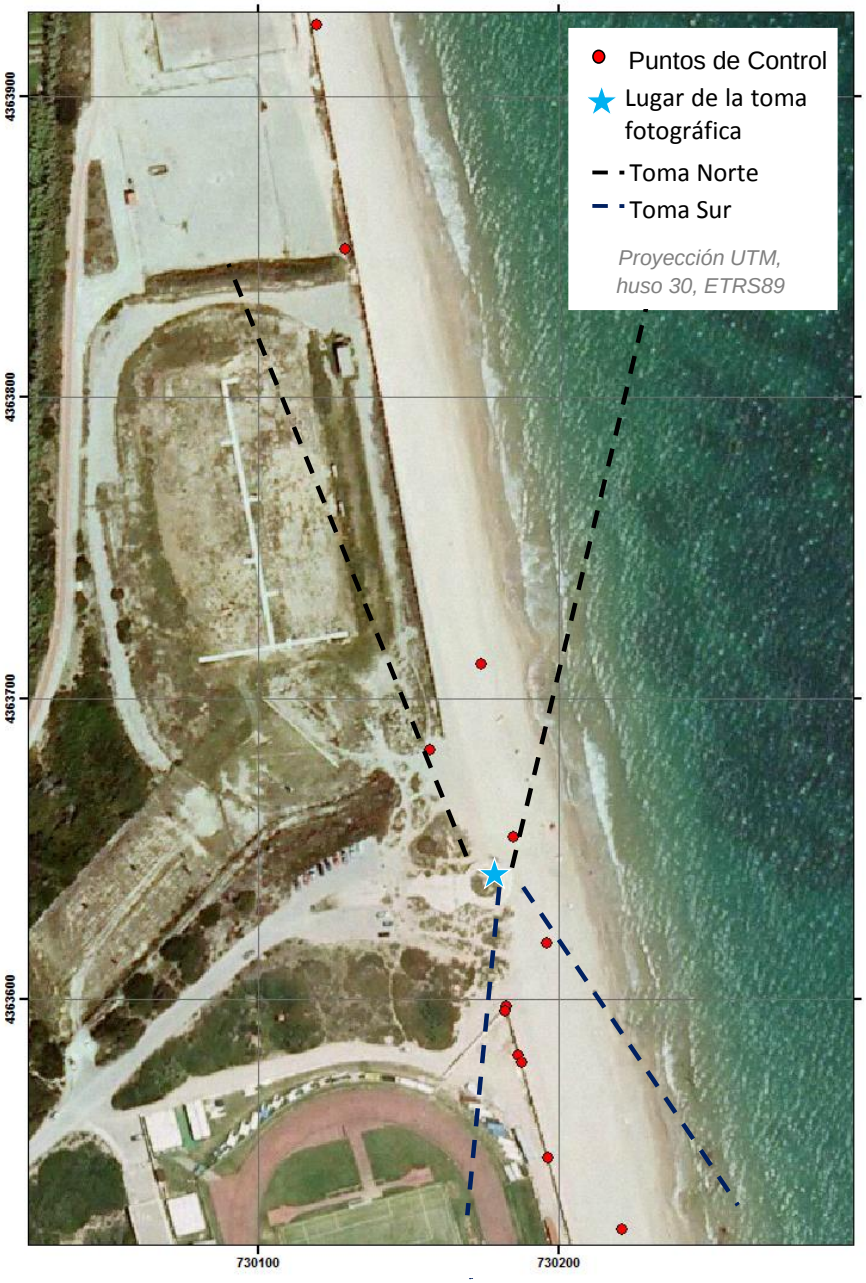


Figura 3: La fotografía izquierda se corresponde con la toma Sur y la de la derecha con el sector norte.

Como ya se ha adelantado en apartados anteriores, la toma de datos se realizó pensando en un estudio comparativo posterior de los resultados obtenidos. Por ello, el día 26 de junio a las 12:45 (que como se verá en el apartado siguiente era cuando se preveía el paso del satélite) se efectuó una serie de capturas consecutivas que abarcasen sobradamente el lapso de tiempo susceptible de paso del satélite en dicha zona. Esta metodología nos permitiría tanto extraer un frame concreto en un instante, como una imagen promedio (a partir de varias consecutivas) del mismo tipo que las imágenes obtenidas por videomonitorización tipo ARGUS. Dicho proceso, también podría obtenerse mediante un fragmento de vídeo pero viéndose afectada la resolución geométrica. La resolución o tamaño del pixel es de gran importancia cuando la línea de costa se ha de deducir en una toma oblicua, y dado que el error se minimiza con una secuencia de imágenes, esta fue la metodología escogida.

Lo complejo de los fenómenos y procesos que interactúan sobre la interfaz tierra-mar, hacen que se trate de un evento oscilante produciéndose tanto avances como retrocesos en la posición de esta línea. El límite tierra emergida-sumergida, varía en función de la posición del nivel de mar y de la forma del perfil de la playa que va siendo modelado por el oleaje incidente, siendo sumamente cambiante. Así pues, el disponer de una imagen promedio (generada con software propio) nos permitirá obviar dichas oscilaciones cíclicas provocadas por el movimiento del oleaje ya que la imagen resultante nos mostrará la playa en un instante promediado como si de un medio estático se tratara, es decir, capturará la posición media donde ha llegado el oleaje en cada uno de los instantes y de este modo nos permitirá dibujar con mayor facilidad la línea de costa tal y como se observa en la imagen siguiente.

Por otro lado, generar una imagen de desviación estándar con toda la secuencia de imágenes, nos ofrece conocer el grado de dispersión que presentan los datos en su distribución con respecto al valor promedio. Por ello se detectarán con mayor definición todos aquellos elementos que han ido variando a lo largo del lapso de tiempo en que se capturó la secuencia de imágenes, como lo es por ejemplo la línea de costa.

Figura 4: La fotografía izquierda se corresponde con la imagen promedio del sector sur y, la de la derecha, con la imagen de varianzas de este mismo sector.

2.2.5. Imagen Landsat.

Previo al trabajo de campo hubo que estudiar en gabinete cuál era la fecha más probable de paso del satélite Landsat 8 hasta la unidad del minuto. Se analizó que a fecha de 20 de junio de 2013 existían tres imágenes disponibles para el cuadrante 199-33 y tres para el cuadrante 198-33.

Para la escena 199-33 se tiene:

Imagen	Día	hora	Path	Row
LC81990332013104LGN01	14/04/2013	10:45:02	199	33
LC81990332013120LGN01	30/04/2013	10:45:00	199	33
LC81990332013136LGN01	16/05/2013	10:45:12	199	33
LC81990332013152LGN00	01/06/2013	10:45:16	199	33
LO81990332013168LGN00	17/06/2013	10:45:10	199	33

Para la escena 198-33:

Imagen	Día	hora	Path	Row
LC81980332013113LGN01	23/04/2013	10:38:49	198	33
LC81980332013145LGN00	25/05/2013	10:39:05	198	33
LC81980332013161LGN00	10/06/2013	10:39:03	198	33

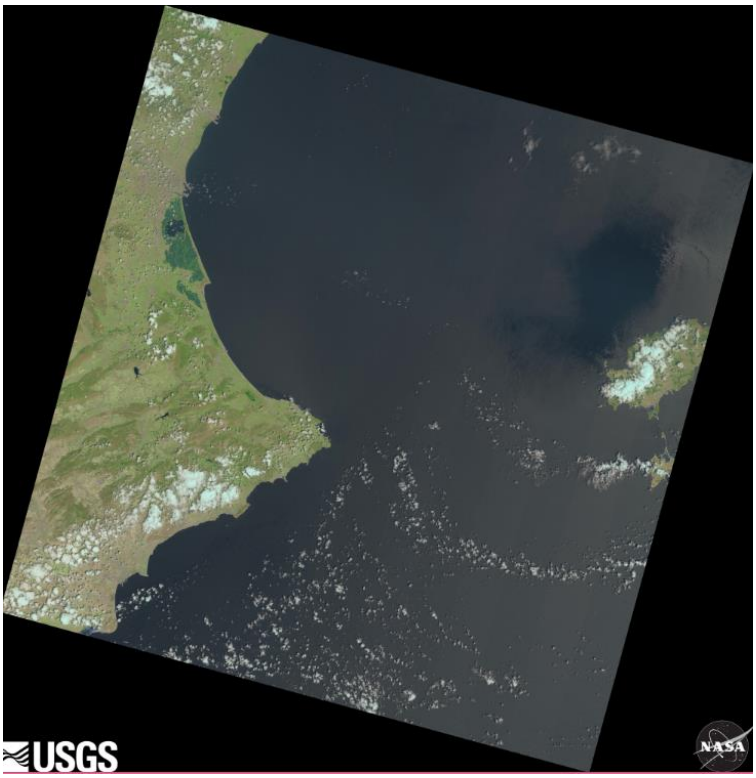
Las respectivas siguientes escenas se prevén para los días 26 de junio y 3 de julio:

199-33	198-33
14/04/2013	*23/04/2013*
30/04/2013	*09/05/2013*
16/05/2013	*25/05/2013*
01/06/2013	*10/06/2013*
17/06/2013	**26/06/2013**
03/07/2013	12/07/2013
19/07/2013	28/07/2013
04/08/2013	13/08/2013

El análisis de las horas arroja de momento que la toma de la escena 199-33 se toma a las 10:45:08, con una desviación de 7 segundos. La toma de la escena 198-33 se da a las 10:45:08 con una desviación de 9 segundos.

Dado que la hora de Landsat está referida al tiempo universal coordinado (UTC), siendo el meridiano cero el de Greenwich, la hora local de paso en horario de verano será las 12:45. En este instante del 26 de junio es por tanto cuando se efectuaron las tomas fotográficas para que fuesen lo más coincidentes posible con el paso del satélite.

A continuación mostramos la imagen Landsat del 26 de junio a partir de la que se extraerá la línea de costa con el algoritmo ya realizado por el grupo CGAT:



3. METODOLOGÍA

3.1 Introducción

El primer objetivo, consistió en generar una herramienta que de forma automática proyectara una fotografía terrestre realizada con una cámara convencional sobre un plano dotado de coordenadas terreno. La metodología desarrollada se aplicó sobre un fragmento concreto del litoral valenciano y se basó en establecer un vínculo entre el espacio terreno y el espacio imagen a partir de una serie de puntos de control previamente medidos en campo con técnicas de alta precisión como lo es el GPS.

En primer lugar se realizó el preprocesado de los datos así como todo el proceso de calibración de la cámara fotográfica utilizada. Tras ella conseguimos obtener los parámetros de orientación interna de la misma y de distorsiones, con los que a su vez se corregirá la fotografía realizada.

A continuación, se trató de recrear el momento en que se realizó la fotografía. Para ello necesitaremos relacionar la posición de un mínimo de tres puntos (dependiendo de la metodología a seguir) en el terreno y en la imagen. De este modo se consiguen obtener los conocidos parámetros de orientación externa con los que se posiciona y orienta la cámara.

Para investigar las relaciones entre ambos espacios (terreno e imagen), se realizó un proceso iterativo para asegurar que los parámetros obtenidos recrearan la toma fotogramétrica lo más fielmente posible a la realidad. En esta parte del proceso matemático es donde fue necesario introducir una serie de constreñimientos matemáticos que dieran rigurosidad al proceso. Por lo general, una fotografía de un sector de playa va a presentar unas características muy homogéneas que dificultaran una correcta distribución de los puntos de apoyo. Sin embargo, se dispone de un elemento ejemplar como es la línea de horizonte donde confluirán todos los puntos de fuga de la imagen y que por tanto actúa como si dispusiéramos de un conjunto de puntos de control en el infinito. De este modo, consiguiendo obtener el horizonte de forma matemática y relacionándolo con los parámetros de orientación externa, podremos incluir estos constreñimientos en el sistema de ecuaciones del proceso iterativo y obtener así una solución mucho más precisa.

Habiendo detectado la posición y orientación de la cámara, restará empezar con el proceso proyectivo.

En primer lugar, se detectarán cuáles son los límites en coordenadas terreno de la imagen y según éstos se generará una cuadrícula georreferenciada con un tamaño de pixel

determinado que finalmente será rellenada con el nivel radiométrico que le corresponda en cada caso de la imagen original.

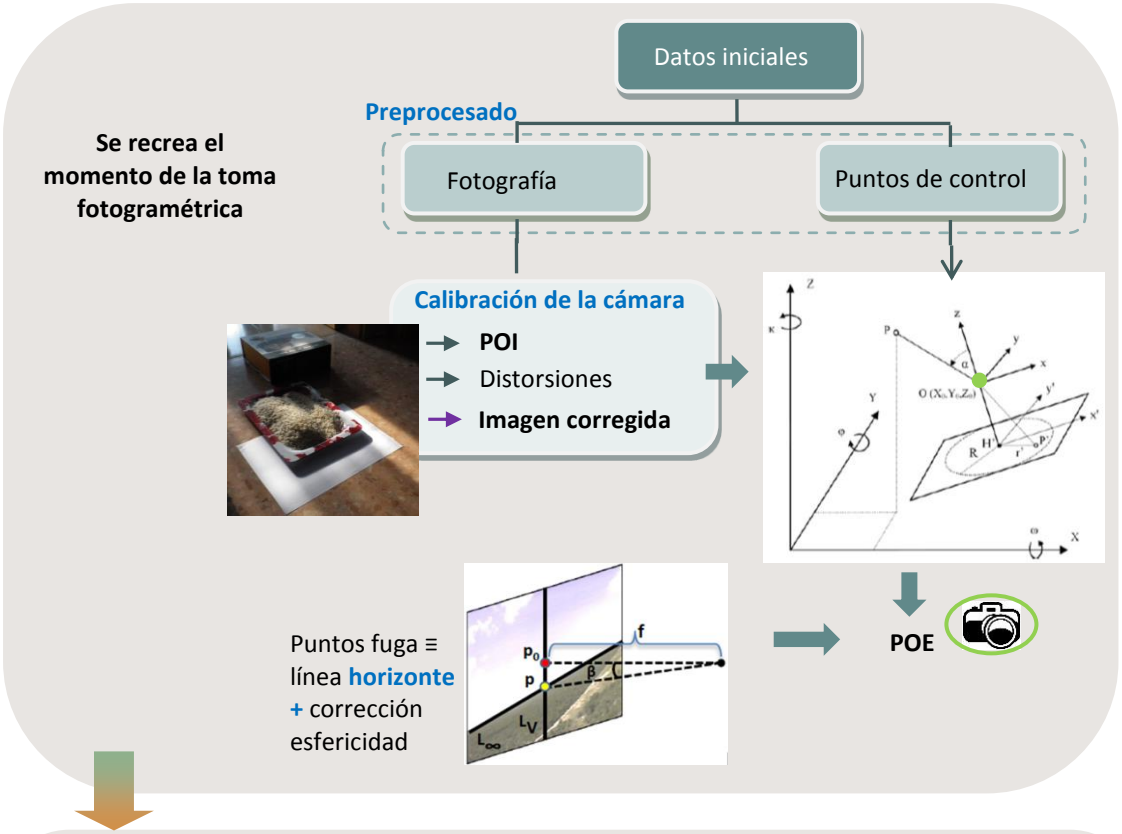
Por último, sobre la imagen proyectada se podrá digitalizar y obtener directamente la posición de la línea de costa.

Una vez generada esta herramienta proyectiva se evaluará su potencial comparándola con otra línea de costa tomada en un intervalo de tiempo muy próximo con GPS. Así mismo también se podrán estudiar las ventajas que nos proporciona la proyección de una imagen promedio frente a una instantánea.

Habiendo establecido la precisión aproximada de la línea proyectada, se podrá realizar un nuevo estudio comparativo esta vez para validar otra línea de costa obtenida de una imagen Landsat. Si este estudio resultara satisfactorio la limitación espacial que tenemos con una fotografía terrestre estaría resuelta.

El esquema general de la metodología se muestra en la siguiente figura:

I. Generación de una herramienta proyectiva



II. Evaluación y comparación de resultados

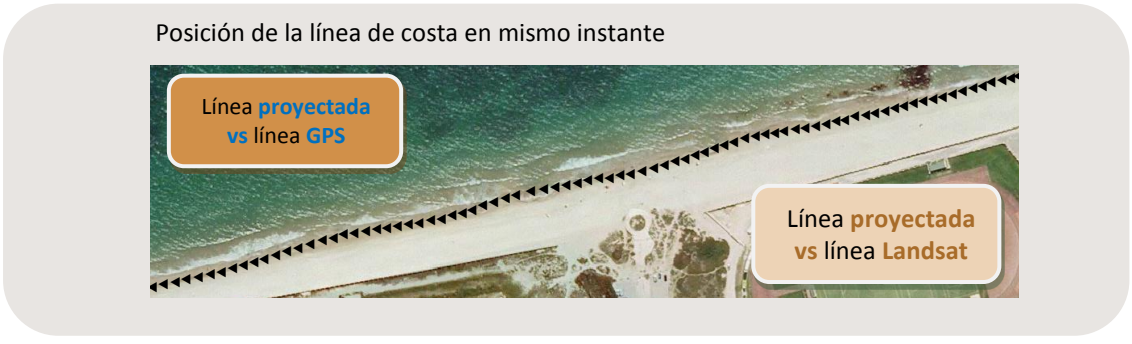


Figura 5: Esquema general de la metodología

Según esta metodología, el diagrama que a continuación se muestra expone los diferentes algoritmos matemáticos que el programa creado va resolviendo a lo largo del proceso:

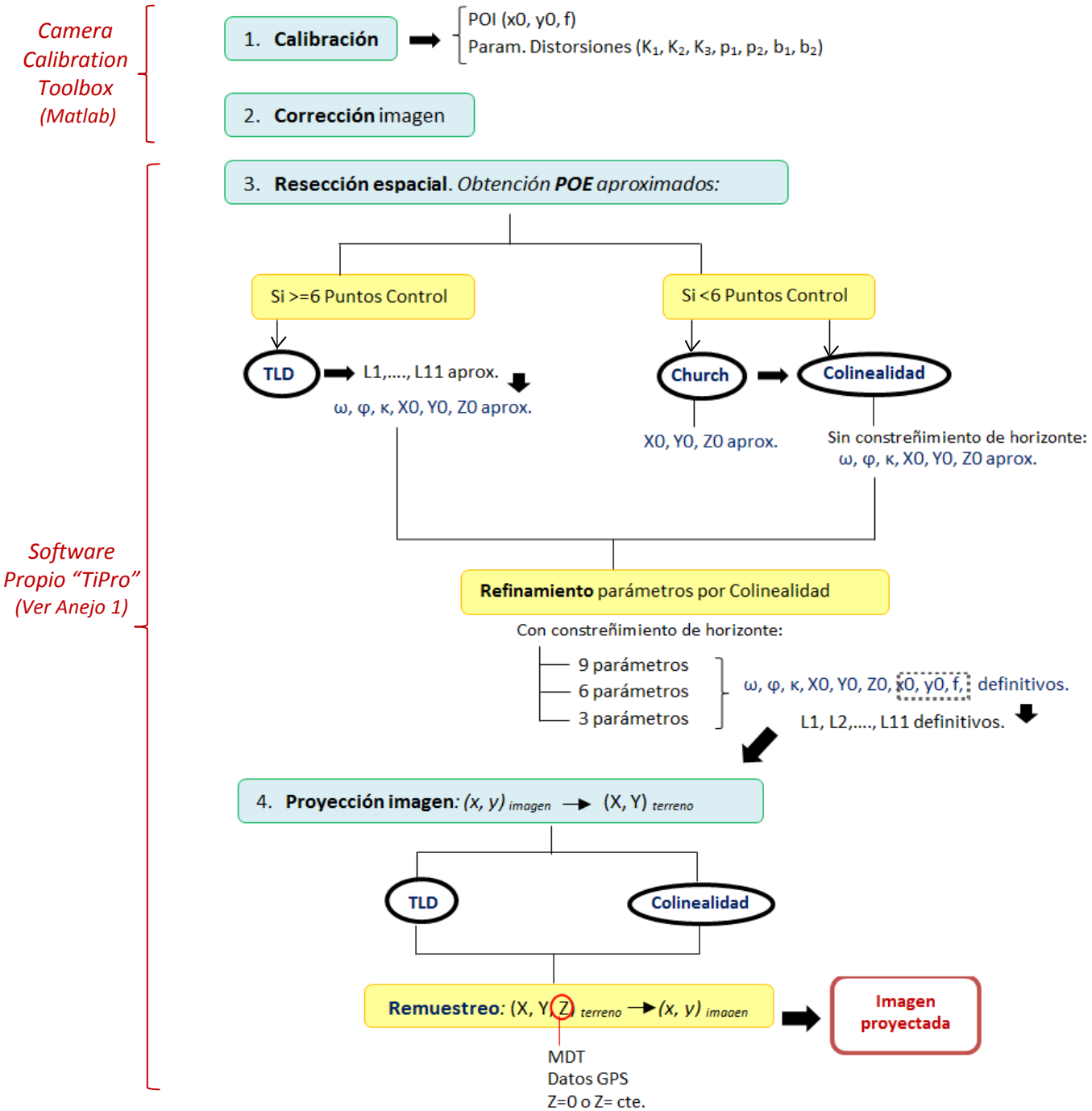


Figura 6: Diagrama que muestra la secuencia de los diferentes procesos matemáticos desarrollados.

3.2 *Software* empleado

Para el tratamiento digital de los datos y la integración de los documentos se han utilizado los *softwares* comerciales siguientes:

- Matlab 2012 (MATrix LABoratory):

Es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación.

Entre sus prestaciones básicas se hallan: la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware.

- ArcGIS (10.1):

ArcGis es un completo sistema de información desarrollado por la empresa estadounidense ESRI, que permite crear, analizar, almacenar y difundir datos, modelos, mapas y globos 3D, poniéndolos a disposición de todos los usuarios según las necesidades de la organización. Es accesible desde clientes *desktop*, navegadores web, y terminales móviles que se conectan a servidores departamentales, corporativos o arquitecturas de computación de la nube. Además, es personalizable y programable a partir de ArcObject y se pueden añadir barras de herramientas externas tales como la extensión “DSAS 4.0” que se ha utilizado en este trabajo.

- Statgraphics:

Statgraphics es un programa para la gestión y análisis de valores estadísticos. Tiene cuatro módulos principales: un editor estadístico (*StatReport*) que prepara informes con datos variables; un asistente estadístico (*StatWizard*) que sugiere los métodos más adecuados para recopilar y analizar datos; y un enlace estadístico (*StatLink*) que enlaza el libro de análisis (*Statfolio*) con la fuente de datos.

Destaca especialmente por sus capacidades para la representación gráfica de todo tipo de estadísticas y el desarrollo de experimentos, previsiones y simulaciones en función del comportamiento de los valores.

3.3. Preprocesado de los datos

Tras todo el trabajo de campo realizado, se requiere la descarga de todos los datos GPS así como su comprobación. Así mismo, se descargará la imagen Landsat 8 procesada y disponible a las 24 horas de la adquisición, según el propio USGS.

Para la comparación de la imagen satélite y los datos de campo habrá que comprobar la coherencia cartográfica de la información. Para ello se analizará la coincidencia de los puntos de control terreno tomados con GPS y su posición en una ortofotografía de alta resolución. Esta coincidencia es primordial puesto que la ortofotografía será empleada para georreferenciar la escena Landsat.

Dado el margen de tiempo en el que es probable que pase el satélite se prevén varios productos cartográficos obtenidos tras el procesado del trabajo de campo.

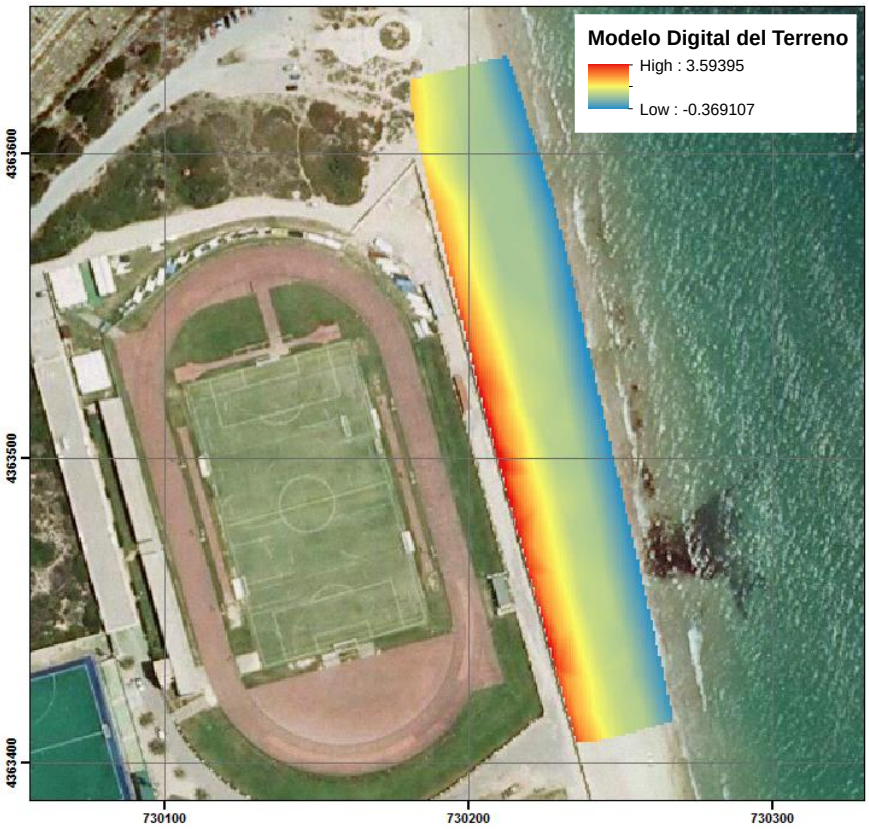
Respecto al procesado de la informaron satélite se seguirá el procedimiento expuesto en Pardo *et al*. 2012 con la imagen Landsat 8, salvo la corrección por radiometría dado que todavía no está parametrizada. El algoritmo de extracción de líneas con imágenes Landsat desarrollado por el CGAT, muestra como resultados unos ficheros de texto .sal que contienen las coordenadas x e y de todos los puntos que forman cada una de las líneas de costa.

Por otro lado, del trabajo con los fotogramas terrestres podrán surgir finalmente diferentes productos tales como:

- Línea de costa dibujada sobre imágenes instantáneas o promedio proyectadas.
- Generación de una ortofografía proyectando la imagen sobre un MDT generado por GPS.

Estos trabajos implicarán la previa calibración de las cámaras, resección y posterior proyección de la imagen a superficie terreno.

Como ya se ha adelantado, a partir de los puntos GPS se generará un modelo digital del terreno para poderlo usar en el proceso de proyección de la fotografía del sector sur. A partir del fichero de puntos con las cotas ortométricas del perfil de la playa se genera una red irregular de triángulos (TIN) y seguidamente un raster de altitud con un tamaño de pixel de 5cm e interpolando y siguiendo el método lineal se obtiene el producto que a continuación se muestra:


Modelo Digital del Terreno
High : 3.59395
Low : -0.369107
4363600
4363500
4363400
730100
730200
730300

3.4. Análisis matemático

3.4.1 Calibración de la cámara y corrección de la fotografía.

En fotogrametría, la extracción de información métrica exige el conocimiento preciso de los elementos o parámetros de orientación interna (coordenadas del punto principal, distancia principal y parámetros de distorsión) de la/s cámara/s. Conocidos éstos, los datos medidos sobre las imágenes fotográficas se corregirán de distorsión geométrica.

La calibración geométrica de una cámara hace referencia al proceso que determina con exactitud y precisión los elementos de orientación interna y la distorsión del objetivo. La disponibilidad de dichos parámetros, así como su consideración y corrección, es imprescindible para extraer la información métrica (espacial) a partir de imágenes fotográficas.

El punto principal de autocolimación es un punto imagen materializado por la incidencia perpendicular al plano imagen de un rayo proveniente del espacio objeto, mientras que la distancia principal o focal es la distancia medida a lo largo del eje óptico desde el nodo posterior de la lente al plano imagen de mejor definición.

El proceso de calibración permite identificar un modelo geométrico para la cámara y un modelo de distorsión para la lente, que se traduce en una serie de parámetros intrínsecos y extrínsecos que caracterizan el montaje. Estos parámetros son de especial interés para conseguir eliminar la distorsión radial y posteriormente trabajar con las imágenes ya rectificadas.

Para calibrar el conjunto de cámara más lente, se necesita un patrón de dimensiones conocidas que consiste en una cuadrícula con varias filas y columnas de cuadros negros y blancos alternados a modo de tablero de ajedrez. Para que los resultados de la calibración sean correctos, se capturan varias imágenes de dicho objeto en diferentes posiciones con respecto a la cámara.

Una cámara adquiere imágenes compuestas de píxeles y cada píxel captura la luz que viaja a lo largo de la proyección de un rayo en 3D. Los rayos de proyección pueden, en principio, ser colocados arbitrariamente, es decir, se asume la inexistencia de una relación funcional entre los rayos de proyección y los píxeles dirigida por unos parámetros intrínsecos. La calibración por tanto se describe según las coordenadas de dichos rayos (dadas en un sistema de coordenadas local) y, la correspondencia entre los rayos y los píxeles, lo que significa básicamente una simple indexación.

Tras este tipo de calibración, se obtiene un haz de rayos donde cada uno de ellos pasa a través del centro óptico. A cada uno se le puede asociar un color específico, tomado de su correspondiente pixel de la imagen. Para obtener una vista en perspectiva se intersecta el haz de rayos con el plano sobre el que se desee. A continuación, se le asigna un color al rayo en el punto de intersección con el plano. Además la interpolación del color se usa para obtener una imagen completa y uniforme que representa la imagen corregida de distorsión.

El modelo matemático de la proyección en perspectiva central se basa en la suposición de que el ángulo de incidencia del rayo de un punto objeto es igual al ángulo entre el rayo y el eje óptico dentro del espacio de la imagen.

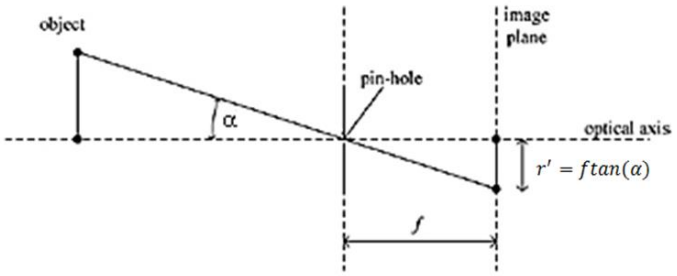


Figura 7: Geometría perspectiva central (Friel, *et al*., 2009).

Para describir la proyección de un punto objeto en una imagen hemisférica, las coordenadas del objeto y las coordenadas de la imagen tienen que referirse al mismo sistema de coordenadas. Por lo tanto, en primer lugar las coordenadas de objetos que son conocidas en el sistema de coordenadas objeto tienen que ser transformadas en el sistema de coordenadas de la cámara. A lo largo de proceso se utilizan los tres sistemas de coordenadas siguientes:

- Sistema de coordenadas cartesiano objeto (X, Y, Z)
- Sistema de coordenadas cámara (x, y, z)
- Sistema de coordenadas imagen (x', y'), paralelo a los ejes de la cámara.

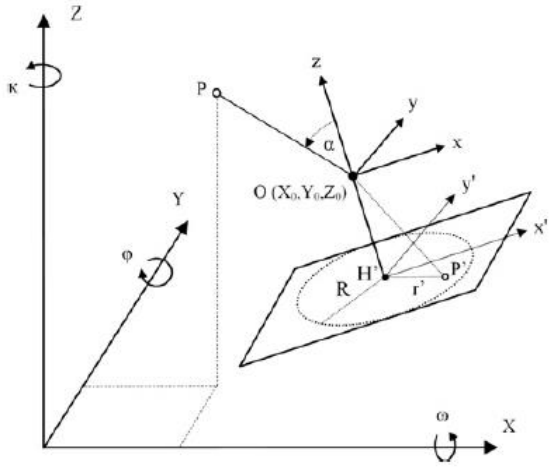


Figura 8: Modelo geométrico cámara (Schneider, *et al*., 2009).

La formulación del modelo matemático descrito en (Schneider, *et al*., 2009) sigue la siguiente secuencia de pasos y que se corresponde con el proceso de cálculo que realiza el programa "*Camera Calibration Toolbox*" con el que se trabajó en el presente proyecto.

En primer lugar, la transformación de coordenadas objeto a cámara se hace utilizando la ecuación:

$$x = R^{-1}(X - X_0) \quad (1)$$

Siendo: *X es el vector coordenadas en el sistema objeto, x el vector en el sistema cámara, R es la matriz de rotación, y X_0 es el vector translación entre los sistemas.*

El ángulo de incidencia en el sistema de coordenadas cámara se define como:

$$\tan \propto = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad (2)$$

Como se ha descrito anteriormente, el radio de la imagen r' calculado como (r'=f*tanα) se define como una función del ángulo de incidencia y la distancia principal, en lugar de funciones del radio, lo que se busca son funciones de las coordenadas en el sistema imagen, sabiendo:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (3)$$

Aplicando el teorema de intersección de líneas en el plano definido por el eje z, el punto imagen y el punto objeto. Queda por tanto la siguiente proporción:

$$\frac{x\prime}{y\prime} = \frac{x}{y} \quad (4)$$

Mediante (3) y (4) la ecuación de proyección es:

$$x' = \frac{r\prime}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}} \qquad y' = \frac{r\prime}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}} \quad (5)$$

La transformación de un punto particular objeto en el sistema de coordenadas cámara xyz todavía tiene que ser transformado en el sistema objeto usando (1).

El modelo de ecuaciones de proyección es finalmente extendido por las coordenadas del punto principal x'_0 y y'_0 y los términos de corrección Δx' y Δy' que contienen los parámetros adicionales para compensar los sistematismos.

$x' = f \cdot \frac{r'}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}} + x'_0 + \Delta x'$	$y' = f \cdot \frac{r'}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}} + y'_0 + \Delta y'$

En cuanto a los parámetros adicionales decir que compensan las desviaciones geométricas del modelo describiendo la distorsión radial y tangencial (descentrado de la lente debido a imperfecciones o defectos en el montaje de la misma). Se calculan del siguiente modo:

$$\Delta x = x' \cdot \left(k_1 r'^2 + k_2 r'^4 + k_3 r'^6\right) + p_1 \cdot \left(r'^2 + 2x'^2\right) + 2p_2 \cdot x'y' + b_1 \cdot x' + b_2 \cdot y'$$

$$\Delta y = y' \cdot \left(k_1 r'^2 + k_2 r'^4 + k_3 r'^6\right) + 2p_1 \cdot x'y' + p_2 \cdot \left(r'^2 + 2y'^2\right)$$

Siendo: k_1, k_2, k_3= parámetros de distorsión radial
p_1, p_2 = parámetros de distorsión tangencial
b_1, b_2= factor de escala horizontal, cizallamiento

3.4.2. Obtención parámetros TLD mediante resección espacial de una única imagen fotográfica.

Se entiende por resección espacial la determinación de los seis parámetros (X_L, Y_L, Z_L, ω, φ, κ) de orientación externa de una imagen fotográfica. Se puede considerar como una particularización de la triangulación fotogramétrica para una sola imagen fotográfica.

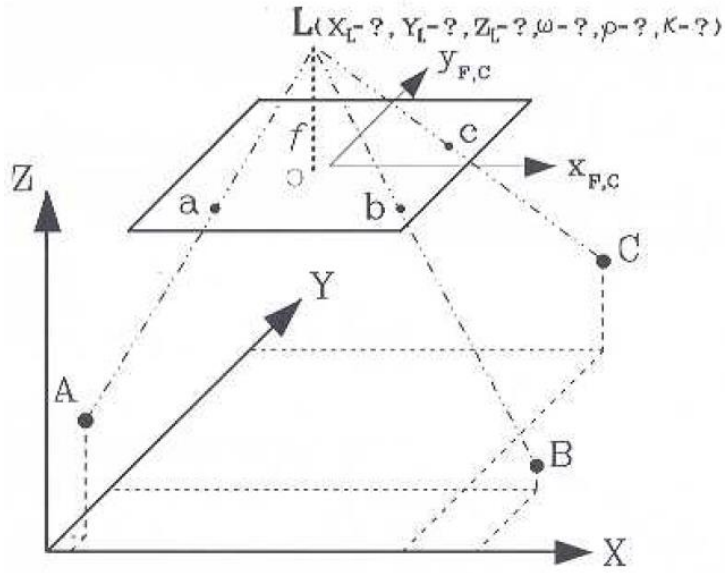


Figura 5: Resección espacial de una imagen fotográfica (Lerma, 2010).

La transformación lineal directa (TLD) se diferencia de otras transformaciones porque no precisa el conocimiento de los parámetros aproximados de orientación interna y externa de la imagen fotográfica, ni las coordenadas calibradas de marcas en la fotografía; los parámetros de orientación interna y externa están implícitos en los once parámetros de transformación (L_1, L_2,…L_{11} ó a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3). Teóricamente la TLD se adapta específica y especialmente a tareas de fotogrametría de objeto cercano. Es una solución lineal de un problema no lineal; por tanto, en principio, implica aproximaciones.

Las ecuaciones de la TLD a partir de la teoría general de la transformación proyectiva son:

$$x = \frac{a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1}{a_3X + b_3Y + c_3Z + 1}$$

$$y = \frac{a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2}{a_3X + b_3Y + c_3Z + 1}$$

Un punto imagen con coordenadas terreno/objeto conocidas genera dos ecuaciones lineales (una por cada componente) que expresadas de forma matricial quedan de la siguiente forma $K_{(2*pto,\ 1)}+R_{(2*pto,\ 1)}=A_{(2*pto,\ 11)} * x_{(11,\ 1)}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\ Y\ Z\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -xX\ -xY\ -xZ \\ 0\ 0\ 0\ 0\ X\ Y\ Z\ 1\ -yX\ -yY\ -yZ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Siendo A la matriz de diseño de los parámetros, x el vector de parámetros, R el vector de residuos y K el vector de términos independientes.

Es importante recordar que para poder utilizar las coordenadas imagen (columna, fila y con origen en la esquina superior izquierda de la imagen) previamente habrá que transformarlas al sistema fiducial con origen en el centro de la imagen.

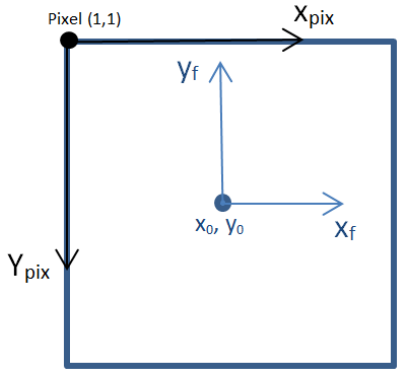


Figura 9: Transformación del sistema pixel (en negro) al sistema fiducial (en color azul).

El sistema requiere la disposición de las coordenadas imagen y terreno de un mínimo de seis puntos ya que cada punto generará dos ecuaciones. Se trata de un método directo, lineal, que no requiere de iteraciones adicionales para obtener la solución de las once incógnitas. Resolviendo por mínimos cuadrados según el método de Gauss-Newton la expresión es:

$$x = (A^T PA)^{-1} A^T PK; \qquad \textit{siendo P la matriz de pesos de los observables}$$

La TLD tiene bastantes ventajas, sobre todo en cuanto a su cualidad lineal y a la indiferencia del tipo de coordenadas imagen empleadas. No obstante, hay que considerar las desventajas que ofrece.

Cabe destacar el número excesivo de parámetros de transformación que podría generar una pérdida de precisión así como el número de puntos a considerar en el ajuste, superior a los tres estrictamente necesarios en las ecuaciones de colinealidad. Además pueden existir problemas numéricos bien cuando el plano que contiene al centro de proyección (paralelo al plano imagen) pasa próximo o contiene el origen del sistema de coordenadas terreno o bien cuando los puntos de apoyo son coplanares (pertenecen a un mismo plano) ya que entonces los once parámetros de transformación dejan de ser independientes.

3.4.3. Relación entre parámetros de orientación externa y parámetros TLD.

A partir de las ecuaciones de la proyección central también se pueden obtener los parámetros TLD, estableciendo así la relación entre los parámetros de la TLD y los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la proyección central.

La dependencia existente entre los once parámetros independientes en la TLD y los nueve parámetros de orientación (interna y externa) en las ecuaciones de colinealidad ha sido demostrada. Sin embargo, el cambio de un espacio n-dimensional a otro n-dimensional exige el mantenimiento del número de parámetros para mantener la consistencia entre los espacios. En caso contrario, la solución que se obtiene es inexacta y sobredeterminada.

Por tanto, la eliminación de dos parámetros de la TLD implica utilizar directamente las ecuaciones no lineales de colinealidad. Por consiguiente, la solución rigurosa requiere de otras estrategias, como es el aumento del número de parámetros adicionales en las ecuaciones de colinealidad. Los parámetros adicionales se ajustan a una transformación afín bidimensional y las ecuaciones resultantes reciben el nombre de ecuaciones de colinealidad extendidas.

Para incorporar los parámetros adicionales en este trabajo se consideraran un factor de escala h y un factor de falta de perpendicularidad d, aunque también se podrían considerar dos factores de escala, uno para el eje x (hx) y otro para el eje y (hy) tal y como hacen otros autores (Balletti y Guerra, 1998) y (Holland et al, 1997).

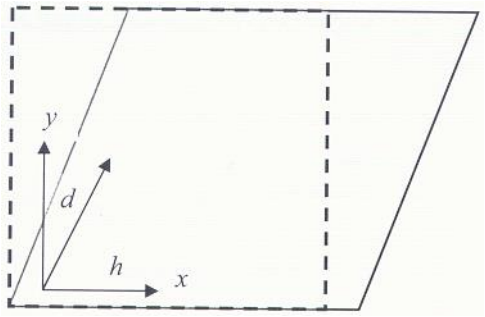


Figura 10: Efecto del factor de escala *h* y el factor de falta de perpendicularidad *d*, en una imagen fotográfica.

De este modo, las ecuaciones de colinealidad extendidas contemplan once parámetros independientes, cinco de orientación interna (x_0, y_0, f, h, d) y seis de orientación externa (ω, φ, κ, X_L, Y_L, Z_L).

La determinación de estos once parámetros de orientación interna y externa, a partir de los parámetros de la TLD, se consiguen con la siguiente formulación (Lerma, 2010).

Parámetros intrínsecos:

$$x_0 = \frac{(a_1 \quad b_1 \quad c_1)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}}{(a_3 \quad b_3 \quad c_3)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}};\ y_0 = \frac{(a_2 \quad b_2 \quad c_2)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}}{(a_3 \quad b_3 \quad c_3)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}};\ f = \sqrt{\frac{(a_1 \quad b_1 \quad c_1)\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}}{(a_3 \quad b_3 \quad c_3)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}} - {x_0}^2};$$

$$d = \frac{(a_1 \quad b_1 \quad c_1)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} * (a_3 \quad b_3 \quad c_3)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} - (a_1 \quad b_1 \quad c_1)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} * (a_2 \quad b_2 \quad c_2)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}}{(a_1 \quad b_1 \quad c_1)\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} * (a_3 \quad b_3 \quad c_3)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} - \left((a_1 \quad b_1 \quad c_1)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)^2};$$

$$h = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{(a_3 \quad b_3 \quad c_3)\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}}\right)^3 * f^2}$$

Parámetros extrínsecos (coordenadas centro de proyección y matriz de orientación mediante rotaciones):

$$\begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^{-T} * \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\omega\varphi\kappa} = \frac{1}{p*h*f} * \begin{pmatrix} h & 0 & -hx_0 \\ -d & 1 & x_0 d - y_0 \\ 0 & 0 & -hf \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^T = {R_{\omega\varphi\kappa}}^T,$$

Por tanto, sabemos que R ha sido obtenida:

$$R_{\omega\varphi\kappa} = R_\kappa R_\varphi R_\omega = \begin{pmatrix} cos\kappa & -sen\kappa & 0 \\ sen\kappa & cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\varphi & 0 & sen\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\varphi & 0 & cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\omega & -sen\omega \\ 0 & sen\omega & cos\omega \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos\kappa cos\varphi & cos\kappa \sin\omega \, sin\varphi - cos\omega \, sin\kappa & sin\kappa \, sin\omega + cos\kappa \, cos\omega * sin\varphi \\ cos\varphi \, sin\kappa & cos\kappa \cos\omega + sin\kappa \, sin\omega \, sin\varphi & cos\omega \, sin\kappa \, sin\varphi - cos\kappa \, sin\omega \\ -sin\varphi & cos\varphi \, sin\omega & cos\omega \, cos\varphi \end{pmatrix}$$

Y entonces igualando conseguimos obtener dos ternas diferentes de los ángulos "φ_1, ω_1, κ_1" y "φ_2, ω_2, κ_2" (Marín. *et al* 2006; Marín. *et al* 2012).

En primer lugar despejamos φ:

$$\text{Phi_}\varphi = M(1,3) = R(3,1) = -\sin\varphi \rightarrow \varphi_1 = -\text{asin}(m_{13})$$
$$\varphi_2 = \text{pi} - \varphi_1$$

Ahora para cada ángulo φ, se obtendrán los dos ángulos correspondientes ω y κ, formando así la triada. El ángulo ω se despejará según:

$$\text{Omega_}\omega = M(2,3) = R(3,2) = \cos\varphi * \sin\omega \rightarrow \omega_{sin} = \text{asin}\left(\frac{M_{23}}{cos\varphi}\right)$$
$$\text{Omega_}\omega = M(3,3) = R(3,3) = \cos\varphi * \cos\omega \rightarrow \omega_{cos} = \text{acos}\left(\frac{M_{33}}{cos\varphi}\right)$$

Dado que la solución del ángulo que resuelve un seno y un coseno es única, se obtiene el ángulo ω de forma directa. Repetimos este mismo proceso para obtener el ángulo κ pero despejando esta vez de las ecuaciones:

$$\text{Kappa_}\kappa = M(1,2) = R(2,1) = cos\varphi \, sin\kappa \rightarrow \kappa_{sin} = \text{asin}\left(\frac{M_{12}}{cos\varphi}\right)$$
$$\text{Kappa_}\kappa = M(1,1) = R(1,1) = \cos\varphi * \cos\kappa \rightarrow \kappa_{cos} = \text{acos}\left(\frac{M_{11}}{cos\varphi}\right)$$

Mediante esta metodología se han conseguido obtener todos los parámetros de orientación externa a partir de los parámetros TLD.

Por otro lado, existe otra opción de obtener los parámetros de orientación externa como la que propone el artículo de (Balleti y Guerra, 1998) y (Chen, 1997), y que también se probó en este trabajo final de carrera, obteniendo los mismos resultados que con el método anteriormente expuesto (*Ver anejo 2*). Los parámetros de orientación interna se calcularían ahora como:

$$x_0 = \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3}{{a_3}^2 + {b_3}^2 + {c_3}^2} \; ; \; y_0 = \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3}{{a_3}^2 + {b_3}^2 + {c_3}^2}$$

$$f_x = \sqrt{\frac{{a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2}{{a_3}^2+{b_3}^2+{c_3}^2} - {x_0}^2}\ ;\ f_y = \sqrt{\frac{{a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2}{{a_3}^2+{b_3}^2+{c_3}^2} - {y_0}^2}\ ;\ f = \frac{f_x+f_y}{2}$$

Y los de orientación externa:

$$\begin{pmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1\ b_1\ c_1 \\ a_2\ b_2\ c_2 \\ a_3\ b_3\ c_3 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\omega = \arctan\left(\frac{-b_3}{c_3}\right)\quad \varphi = \arcsin\left(\frac{-a_3}{\sqrt{{a_3}^2+{b_3}^2+{c_3}^2}}\right)\quad \kappa = \arccos\left(\frac{a_1 - x_0 a_3}{c_x * cos\varphi * \sqrt{{a_3}^2+{b_3}^2+{c_3}^2}}\right)$$

A continuación, para obtener el proceso inverso, es decir, obtener los parámetros TLD a partir de los de orientación externa, se seguirá la formulación siguiente (Lerma, 2010*)*:

Obtenemos la matriz de orientación M (ahora a partir de la rotación de colinealidad):

$$R_{\omega\varphi\kappa}{}^{-1} = M_{\omega\varphi\kappa}$$

Y los coeficientes de la TLD calculados a partir de los parámetros de orientación externa e interna son:

$$\begin{pmatrix} a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \\ a_2\ b_2\ c_2\ d_2 \\ a_3\ b_3\ c_3\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} * \begin{pmatrix} fm_{11} - x_0 m_{31} & fm_{12} - x_0 m_{32} & fm_{13} - x_0 m_{33} & \alpha \\ fm_{21} - y_0 m_{31} & fm_{22} - y_0 m_{32} & fm_{23} - y_0 m_{33} & \beta \\ -m_{31} & -m_{32} & -m_{33} & \lambda \end{pmatrix}$$

Siendo:

$\alpha = (x_0 m_{31} - f m_{11})\ X_L + (x_0 m_{32} - f m_{12})\ Y_L + (x_0 m_{33} - f m_{13})\ Z_L$
$\beta = (y_0 m_{31} - f m_{21})\ X_L + (y_0 m_{32} - f m_{22})\ Y_L + (y_0 m_{33} - f m_{23})\ Z_L$
$\lambda = m_{31} X_L + m_{32} Y_L + m_{33} Z_L$

3.4.4. Refinamiento de los parámetros de orientación externa.

Este apartado estudiará la metodología a seguir para calcular unos parámetros de orientación externa más precisos y exactos tras un proceso iterativo. Los valores introducidos en el proceso se corresponderán con los aproximados obtenidos de forma directa por el sistema de TLD y su posterior conversión a parámetros de orientación externa directos (X_L, Y_L, Z_L, ω, ϕ, κ) o bien, por otra aproximación como explica el apartado 3.4.5 (cuando el número de puntos de apoyo, inferior a seis, no permite calcular la TLD).

En cuanto a los parámetros de orientación interna (x_0, y_0, f) introducidos a priori de forma aproximada en el sistema iterativo, bien se corresponderán con los obtenidos de la calibración de la cámara, en cuyo caso se consideraran fijos (se resolverá colinealidad por seis parámetros), o bien se incluirán en el sistema (colinealidad de nueve parámetros) si son los valores obtenidos por el proceso de TLD directa.

La resolución de la resección espacial mediante la condición de colinealidad se lleva a cabo desarrollando las ecuaciones de la proyección central. Considerando dichas ecuaciones para la imagen en negativo tenemos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \mathbf{f}\frac{\mathbf{m_{11}(X - X_L) + m_{12}(Y - Y_L) + m_{13}(Z - Z_L)}}{\mathbf{m_{31}(X - X_L) + m_{32}(Y - Y_L) + m_{33}(Z - Z_L)}}$$

De donde:

$$F_x \equiv x - x_0 - f\frac{m_{11}(X - X_L) + m_{12}(Y - Y_L) + m_{13}(Z - Z_L)}{m_{31}(X - X_L) + m_{32}(Y - Y_L) + m_{33}(Z - Z_L)} = 0$$

$$F_y \equiv y - y_0 - f\frac{m_{11}(X - X_L) + m_{12}(Y - Y_L) + m_{13}(Z - Z_L)}{m_{31}(X - X_L) + m_{32}(Y - Y_L) + m_{33}(Z - Z_L)} = 0$$

Las ecuaciones requieren de una linealización que permita la resolución mínimo cuadrática de los parámetros de orientación externa X_L, Y_L, Z_L, ω, φ, κ, y, en ocasiones, los parámetros de orientación interna x0, y0, f, entre otros. Además, las coordenadas imagen medidas y las coordenadas terreno/objeto conocidas no están exentas de error y en consecuencia, las ecuaciones de error para cada imagen de punto medido, tras su linealización mediante series de Taylor de las funciones F_x y F_y son, despreciando infinitésimos de segundo orden. El sistema que se resolverá en el trabajo que nos concierne es el siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccccc:ccc} \frac{\partial Fx}{\partial \omega} & \frac{\partial Fx}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fx}{\partial \kappa} & \frac{\partial Fx}{\partial X_L} & \frac{\partial Fx}{\partial Y_L} & \frac{\partial Fx}{\partial Z_L} & \frac{\partial Fx}{\partial x_0} & \frac{\partial Fx}{\partial y_0} & \frac{\partial Fx}{\partial f} \\ \frac{\partial Fy}{\partial \omega} & \frac{\partial Fy}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fy}{\partial \kappa} & \frac{\partial Fy}{\partial X_L} & \frac{\partial Fy}{\partial Y_L} & \frac{\partial Fy}{\partial Z_L} & \frac{\partial Fy}{\partial x_0} & \frac{\partial Fy}{\partial y_0} & \frac{\partial Fy}{\partial f} \end{array}\right)_0 \left(\begin{array}{c} d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \\ dX_L \\ dY_L \\ dZ_L \\ \hdashline dx_0 \\ dy_0 \\ df \end{array}\right) + \binom{F_x}{F_y}_0 = 0$$

El subíndice "o" indica que se particularizan las funciones Fx y Fy y las derivadas parciales (matriz jacobiana) para los valores aproximados de los parámetros de orientación interna y externa.

La resolución de los parámetros de orientación puede realizarse una vez más siguiendo el método general de los mínimos cuadrados Ax=K+R, mediante un proceso iterativo.

Si el proceso sólo pretende obtener los parámetros de orientación externa, el sistema a resolver será colinealidad por 6 parámetros: $A_{(2*GPC,\ 6)} \times_{(6,\ 1)} = K_{(2*\ GPC,\ 1)} + R_{(2*\ GPC,\ 1)}$ y sólo se necesitaran tres puntos de apoyo. Esto ocurrirá cuando los parámetros de orientación interna hayan sido obtenidos por calibración de la cámara y se consideran suficientemente exactos como para considerarlos fijos. Sin embargo, cuando éstos no hayan podido obtenerse por calibración y sus valores sean los obtenidos por TLD directa, se incluirán en el sistema como incógnitas y por tanto se resolverá colinealidad por 9 parámetros (necesarios mínimo 5 puntos): $A_{(2*\ GPC,\ 9)} \times_{(9,\ 1)} = K_{(2*\ GPC,\ 1)} + R_{(2*\ GPC,\ 1)}$.

La resolución del sistema por mínimos cuadrados se realizará según tres metodologías diferentes: resolución por Gauss-Newton, sin escalado y, Levenberg–Marquardt con escalado. Con todas ellas el proceso iterativo finalizará obteniendo la misma solución, pero los saltos del gradiente en busca de la solución óptima realizados por cada iteración habrán sido diferentes.

Mínimos cuadrados es una técnica de análisis numérico enmarcada dentro de la optimización matemática, en la que, dados un conjunto de pares ordenados: variable independiente, variable dependiente, y una familia de funciones, se intenta encontrar la función continua, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos (un "mejor ajuste"), de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático. En su forma más simple, intenta minimizar la suma de cuadrados de las diferencias en las ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función elegida y los correspondientes valores en los datos.

Por un lado, el teorema de Gauss-Newton prueba que los estimadores mínimos cuadráticos carecen de sesgo y que el muestreo de datos no tiene que ajustarse, por ejemplo, a una distribución normal. La expresión para la resolución de este sistema es:

$$x = (A^T PA)^{-1} A^T PK$$

Por otro lado, el método de Levenberg–Marquardt se utiliza principalmente en la resolución de problemas de mínimos cuadrados no lineales (More *et al*., 1977; Madsen *et al.,* 2004). Evita las dificultades que pueda tener el método de Gauss-Newton cuando a lo largo del proceso iterativo, en algún punto, la matriz Jacobiana no tiene rango completo o está mal condicionada. La idea básica de este método es combinar, en un único método, la robustez del

método de descenso de la mayor pendiente y la eficiencia local del método de Newton. Usa una dirección de búsqueda que es solución del conjunto de ecuaciones lineales.

El sistema se resolverá según la expresión:

$$x = ((A^T PA) + \lambda * I)^{-1} A^T PK$$

Siendo λ un parámetro que irá controlando los diferentes saltos que seguirá el proceso iterativo. Inicialmente se estimará como un valor pequeño de aproximadamente 0.01, y se irá escalando en función de los resultados obtenidos en cada iteración para conseguir una convergencia más rápida. De este modo, si el ajuste ha sido bueno y converge (residuos menores a los obtenidos en la iteración anterior, ${\sigma_0}^2 \leq {\sigma_0}^2{}_{iteración\ anterior}$), entonces el parámetro λ se hará más pequeño (λ= λ/10). Por el contrario, si el ajuste ha sido peor o ha sido insignificante para el modelo (${\sigma_0}^2 > {\sigma_0}^2{}_{iteración\ anterior}$), el sistema divergerá y por tanto este factor se aumentará (λ= λ*10) y la matriz de parámetros o incógnitas "x" pasará a valer cero. Se observa por tanto que cuando λ sea cero, la dirección será idéntica al método Gauss-Newton.

Por último, en ocasiones, puede ser que la matriz jacobiana (A) presentase problemas de escalado y en tal caso deberíamos de recurrir a la resolución llamada Levenberg–Marquardt con escalado, que usa la diagonal de ($A^T PA$) en lugar de la matriz identidad:

$$x = ((A^T PA) + \lambda * diag(A^T PA))^{-1} A^T PK$$

Este método es adecuado en ajustes como el presente, donde la naturaleza de las ecuaciones con que se trabaja no es la misma (se combinan variables lineales con angulares) y, por ello, el salto en el gradiente se ha de adaptar a cada una de ellas en función de su comportamiento.

La resolución del sistema mínimo cuadrático, por cada uno de los tres métodos, finalizará cuando la corrección de los parámetros (vector de incógnitas "x", con los diferenciales de los parámetros) sea despreciable (se estimó un valor umbral inferior a 10^{-10}).

Se calcularán así mismo y, por cada iteración, diferentes estimadores que valoren el ajuste para un sistema de ecuaciones como el expuesto como son: la matriz cofactor de los parámetros o incógnitas (Q_{xx}), la matriz varianza-covarianza de las incógnitas que nos informarán acerca de la precisión o el margen de error con que se han calculado los parámetros (σ_{xx}), así como el estimador de la varianza de la medida de peso unidad (${\sigma_0}^2$). Este último está basado en una hipótesis que supone que su valor a priori es la unidad, por tanto cuanto más próximo a uno sea el estimador a posteriori, mejor será el ajuste realizado, el

estimador será adimensional. No obstante, cuando no interviene la ponderación de los observables en el ajuste, este estimador será dimensional y por tanto su evaluación se establecerá comparando con los errores estimados a priori.

$$Q_{xx} = (A^T PA)^{-1} \;;\; \sigma_{xx} = \sqrt{{\sigma_0}^2 Q_{xx}} \;;\; {\sigma_0}^2 = \frac{R^T PR}{m - Rg(A)}$$

Siendo "Rg(A)" el rango de la matriz A que será igual al número de incógnitas o parámetros del modelo, "P" la matriz de pesos de los observables y, "m" el número de ecuaciones que intervendrán en el ajuste (2*GCP + 2ecuaciones que definen la línea de horizonte). Por tanto m-Rg(A) serán los grados de libertad del ajuste.

Además, cada vez que se resuelve el sistema lineal por mínimos cuadrados, se obtiene el p-valor de cada uno de los diferenciales del vector solución "x"; estimador que nos informará sobre la significancia que aporta al ajuste la corrección a realizar por cada parámetro. El p-valor muestra la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el que realmente se ha obtenido. Se calcula mediante la distribución t-Student y, estudiando la probabilidad a la derecha de cada uno de los valores estimados (diferenciales o incógnitas obtenidas dividido por su desviación estándar), con los grados de libertad del ajuste y dos colas.

Se obtendrá un p-valor diferente por cada diferencial calculado y en cada iteración. Si el p-valor fuese inferior a $\alpha = 0.05$, entonces se podría afirmar que dicha corrección (diferencial) es estadísticamente significativa para el conjunto del modelo. Sin embargo, conforme el proceso iterativo avanza, los valores de los p-valor se harán más próximos a la unidad, indicando que poco van a aportar en la corrección del parámetro.

3.4.5. Método alternativo de Church para el cálculo de los parámetros de orientación externa.

La resección espacial mediante el método de Church se caracteriza por el número reducido de ecuaciones que se precisan en la formación y la resolución matricial del sistema correspondiente. Conduce a una solución muy rápida y de calidad.

El número mínimo de ecuaciones para la determinación de las correcciones a las coordenadas aproximadas de los centros de proyección es tres, requiriéndose para ello un mínimo de tres puntos de apoyo e imagen que permitirán una resolución mínimo cuadrática del sistema con que se obtienen las coordenadas del centro de proyección. Así mismo, el número total de ecuaciones (N_{EC}) que podemos formar es:

$$N_{EC} = \frac{n\,(n-1)}{2}; \qquad \textit{siendo "n" el número de puntos de apoyo}$$

El método de Church considera que, en una imagen fotográfica, los rayos provenientes del espacio terreno/objeto forman en el vértice (centro de proyección) ángulos iguales a los procedentes del espacio imagen. El ángulo que forman los rayos que pasan por dos puntos del terreno es idéntico al formado por los correspondientes puntos imagen en la fotografía. Esta condición equivale a:

$$\acute{a}ngulo\ ALB = \acute{a}ngulo\ aLb$$
$$\acute{a}ngulo\ ALC = \acute{a}ngulo\ aLc$$
$$\acute{a}ngulo\ BLC = \acute{a}ngulo\ bLc$$

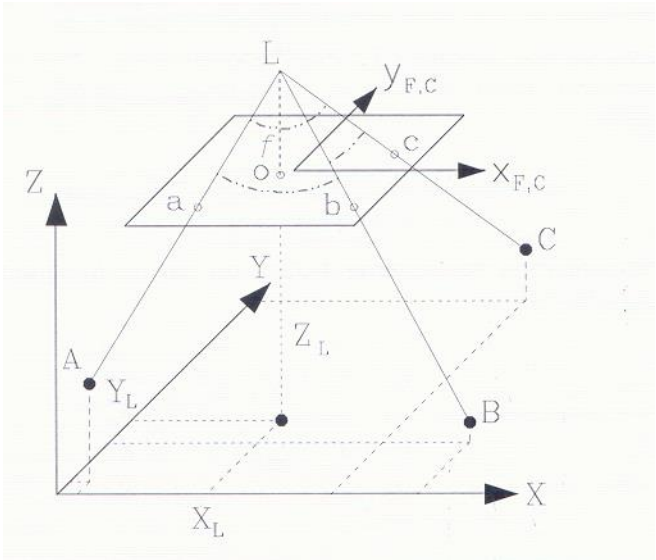


Figura 11: Geometría de la resección espacial mediante rotaciones (Lerma, 2010).

La declaración matemática de la condición anterior se realiza por medio de los cosenos directores de los ángulos interiores que forman los rayos La, Lb, Lc, LA, LB y LC. En el espacio imagen estos son:

$$\cos(aLb) = \frac{(x_a - x_0)(x_b - x_0) + (y_a - y_0)(y_b - y_0) + f^2}{\sqrt{(x_a - x_0)^2(y_a - y_0) + f^2}\ \sqrt{(x_b - x_0)^2(y_b - y_0) + f^2}}$$

$$\cos(aLc) = \frac{(x_a - x_0)(x_c - x_0) + (y_a - y_0)(y_c - y_0) + f^2}{\sqrt{(x_a - x_0)^2(y_a - y_0) + f^2}\ \sqrt{(x_c - x_0)^2(y_c - y_0) + f^2}}$$

En el espacio terreno:

$$\cos(ALB) = \frac{(X_A - X_L)(X_B - X_L) + (Y_A - Y_L)(Y_B - X_L) + (Z_A - Z_L)(Z_B - Z_L)}{\sqrt{(X_A - X_L)^2 + (Y_A - Y_L)^2 + (Z_A - Z_L)^2}\ \sqrt{(X_B - X_L)^2 + (Y_B - X_L) + (Z_B - Z_L)^2}}$$

$$\cos(ALC) = \frac{(X_A - X_L)(X_C - X_L) + (Y_A - Y_L)(Y_C - X_L) + (Z_A - Z_L)(Z_C - Z_L)}{\sqrt{(X_A - X_L)^2 + (Y_A - Y_L)^2 + (Z_A - Z_L)^2}\ \sqrt{(X_C - X_L)^2 + (Y_C - X_L) + (Z_C - Z_L)^2}}$$

Siendo los denominadores precisamente las distancias La, Lb, Lc, LA, LB, LC.

Con esto, las funciones a utilizar para determinar las coordenadas del centro de proyección y, los parámetros de orientación interna en caso de no disponer de calibración de la cámara, son:

$$\mathrm{F}_{AB} = cosALB - \cos aLb = 0$$

$$\mathrm{F}_{AC} = cosALC - \cos aLc = 0$$

Linealizando estas ecuaciones y conociendo las coordenadas terreno fijas de los puntos de apoyo, las coordenadas terreno aproximadas de los centros de proyección y, los parámetros aproximados de orientación interna, se pueden determinar las correcciones a los seis parámetros anteriores derivando con respecto a los parámetros aproximados. No obstante, cuando los parámetros de orientación interna provengan de la calibración de la cámara, se establecerán como fijos y por tanto se reduciría el número de incógnitas a tres quedando:

$$\mathrm{F}_{AB} = \left(\mathrm{F}_{AB}(X_L, Y_L, Z_L)\right)_0 + \left(\frac{\partial F_{AB}}{\partial X_L}\right)_0 dX_L + \left(\frac{\partial F_{AB}}{\partial Y_L}\right)_0 dY_L + \left(\frac{\partial F_{AB}}{\partial Z_L}\right)_0 dZ_L$$

$$\mathrm{F}_{AC} = \left(\mathrm{F}_{AC}(X_L, Y_L, Z_L)\right)_0 + \left(\frac{\partial F_{AC}}{\partial X_L}\right)_0 dX_L + \left(\frac{\partial F_{AC}}{\partial Y_L}\right)_0 dY_L + \left(\frac{\partial F_{AC}}{\partial Z_L}\right)_0 dZ_L$$

El sistema que se resolverá en el trabajo que nos concierne es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Fx}{\partial X_L} & \frac{\partial Fx}{\partial Y_L} & \frac{\partial Fx}{\partial Z_L} \\ \frac{\partial Fy}{\partial X_L} & \frac{\partial Fy}{\partial Y_L} & \frac{\partial Fy}{\partial Z_L} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} dX_L \\ dY_L \\ dZ_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}_0 = 0$$

El subíndice “o” indica que se particularizan las funciones Fx y Fy y las derivadas parciales (matriz jacobiana) para los valores aproximados de los parámetros.

La resolución del sistema puede realizarse una vez más siguiendo el método general de los mínimos cuadrados Ax=K+R, mediante un proceso iterativo, y por cualquiera de las tres metodologías expuestas en el apartado anterior (Gauss-Newton, Levenberg–Marquardt con escalado y sin escalado).

3.4.6 Constreñimiento para la línea de horizonte.

Para el proceso de proyección de una fotografía del litoral, se hace necesario el detectar la línea de horizonte e incluirla en el sistema de ecuaciones que nos permitirá resolver los parámetros de orientación externa. Esta condición actúa como un constreñimiento ya que conseguiremos fijar una serie de puntos de control o de fuga en el infinito que ayudaran a la hora de proyectar y georreferenciar la imagen sobre un plano.

En una primera aproximación y, considerando que la Tierra es localmente plana, la línea del horizonte representada en la imagen es la intersección de dos planos: el plano z=Z0 de la posición de la cámara y el plano de la imagen. La intersección será la recta que defina el horizonte y será dependiente de la orientación de la cámara, es decir, del observador.

Como ya se vio en apartados anteriores, la determinación de la relación entre el sistema de coordenadas objeto (XYZ) e imagen (xyf) resulta ser simple a través del cálculo de las tres rotaciones (ángulos de Euler):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_{\omega\varphi k} \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix}$$

La solución del sistema se basa en el conocimiento de puntos de coordenadas terreno conocidas pero esto no es siempre posible (Rodríguez, 2008). Por ello y para solucionar este problema, se requiere de constreñimientos geométricos tales como el uso de líneas rectas paralelas y perpendiculares en el espacio objeto, a partir de las que es posible calcular la línea de fuga en el espacio imagen que estará relacionada con los ángulos de orientación.

Además, la relación angular de los tres ejes dimensionales coordenados cartesianos en un sistema relativo a otro puede ser especificada por tres parámetros independientes. Dos grupos comunes de parámetros son tilt, swing, azimuth (α, t, s) y, omega, phi, kappa (ω, φ, κ).

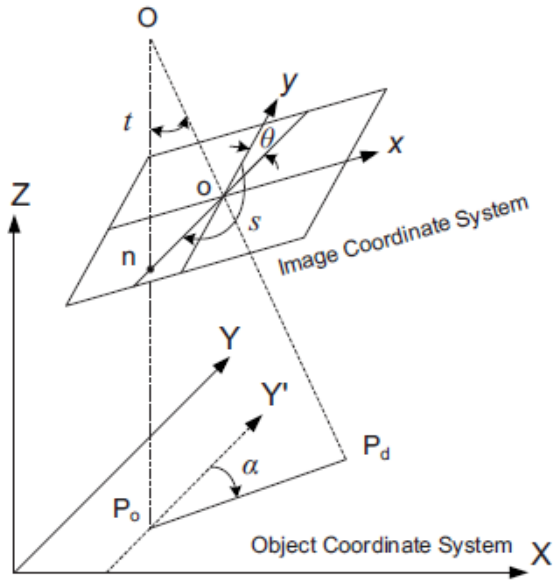


Figura 12: Plano imagen de la cámara con las tres orientaciones angulares (α, t, s); (Fei Dai, *et al*., 2011).

Con ambos grupos se puede generar la matriz de rotación. Para la utilización de α, t, s, el sistema de coordenadas objeto puede ser analíticamente rotado para ser alineado con el sistema de coordenadas imagen. Para desarrollar las fórmulas de la rotación, el sistema de coordenadas objeto e imagen han de ser ambos trasladados al origen del centro de la cámara en perspectiva (figura 13A).

La definición de los elementos de la matriz de rotación en términos del tilt (t), swing (s o Θ), azimuth (α) se obtienen de la siguiente forma:

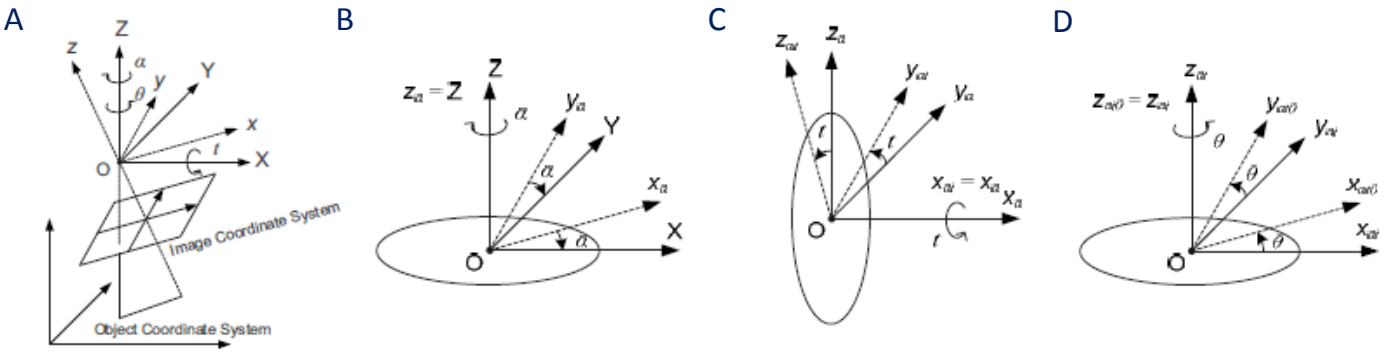


Figura 13: A) Rotaciones en *azimuth, tilt y swing* en el espacio tridimensional. B) Primera rotación en azimuth. C) Segunda rotación en tilt. D) Tercera rotación en swing; (Fei Dai, *et al*., 2011).

En primer lugar se rotará mediante el azimuth (R_α), en que el sistema de coordenadas XYZ gira un ángulo en sentido horario sobre el eje Z para generar el sistema de coordenadas $x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ (figura 13B). En segundo lugar se rotará mediante tilt (R_t) girando así el sistema $x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ en sentido anti horario sobre el eje x_α y, obteniendo el sistema $x_{\alpha t} y_{\alpha t} z_{\alpha t}$ (figura 13C). Por último

y en tercer lugar, la rotación del swing (R_s) se lleva a cabo respecto al ángulo Θ, que se define como Θ=s-180º (figura 12). La rotación del ángulo Θ, gira en sentido contrario a las agujas del reloj sobre el eje $z_{\alpha t}$ obteniéndose el sistema $x_{\alpha t\Theta}y_{\alpha t\Theta}z_{\alpha t\Theta}$.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} cos \propto & sin \propto & 0 \\ -sin \propto & cos \propto & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\, t & -sin\, t \\ 0 & sin\, t & cos\, t \end{pmatrix}, \; R_\Theta = \begin{pmatrix} cos\,\Theta & -sin\Theta & 0 \\ sin\Theta & cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ó}$$

$$sustituyendo \;\; \Theta = s - 180º \rightarrow R_s = \begin{pmatrix} -cos\, s & sins & 0 \\ -sin\, s & -coss & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de rotación $R_{\alpha\, t\, s} = R_\alpha R_t R_s$ queda de la siguiente forma:

$$R_{\propto ts} = \begin{pmatrix} -\cos\, s\, cos \propto -sin \propto cos\, t\, sin\, s & cos\, s\, sin \propto -sin\, s\, cos \propto cost & -\sin t \sin s \\ cos \propto \sin s - sin \propto \cos s \cos t & -sin \propto \sin s - cos \propto cost \cos s & -sin\, t \cos s \\ -sin \propto sint & -cos \propto sint & cos\, t \end{pmatrix}$$

Para la fotografía aérea vertical, los valores de tilt, omega y phi son nominalmente cero (Bon, 1996). Sin embargo, para las aplicaciones de corto alcance, el eje de la cámara puede señalar hacia arriba desde el horizonte, causando que uno o más de estos ángulos sean superiores a 90º. Los posibles rangos de valores para estos parámetros son los siguientes:

tilt: [0º a 180º]	omega: [-180º a 180º]
swing: [-180º a 180º]	phi: [-90º a 90º]
azimuth: [-180º a 180º]	kappa: [-180º a 180º]

Estos intervalos son elegidos para permitir una conversión directa entre los dos grupos de ángulos (α, t, s y, omega, phi, kappa). Para pasar de un sistema a otro, primero la matriz de rotación (o al menos los términos necesarios dentro de ella) se forma a partir de los ángulos en el sistema dado. Por tanto si los ángulos de tilt, swing y azimuth son requeridos, éstos pueden ser expresados como se expone a continuación a partir de los elementos de la matriz de rotación calculada con el grupo de ángulos complementario *omega, phi, kappa* ($R_{\omega\varphi k}$) expuesta en la página 42 del presente escrito:

$$tilt = cos^{-1}(r_{33}), \;\; swing = tan^{-1}(r_{13}/r_{23}), \; \text{azimuth} = tan^{-1}(r_{31}/r_{32})$$

Una vez establecida la relación entre ambos grupos de ángulos, retomamos el cálculo de la línea de fuga.

La determinación de esta línea requiere el cálculo de los puntos de fuga que resultan de las intersecciones generadas por los pares de líneas rectas paralelas, cuya imagen en el

fotograma es convergente debido a la proyección cónica (Rodríguez, 2008). La línea de fuga puede calcularse mediante dos pares de líneas paralelas para obtener una solución única o bien usando un ajuste por mínimos cuadrados encontrando una solución formada por numerosas intersecciones, por medio de diferentes pares del mismo plano o incluso en planos paralelos. En este trabajo los puntos de fuga se detectaron directamente marcándolos en la imagen. Este procedimiento sufre los errores causados por la precisión en dicha detección de los puntos y la ecuación de la línea de fuga sería:

$$(y - ya) = \frac{(x-xa)(yb-ya)}{(xb-xa)}, \textit{ siendo a y b dos puntos de fuga} \qquad (6)$$

Por otro lado, se conoce que la línea de fuga es la intersección del plano imagen y un plano paralelo al plano del objeto pasando por el centro óptico de la cámara. Por tanto, usando la línea de fuga como eje de rotación del plano imagen, con una simple rotación (ψ) ambos espacios podrían orientarse. Para ello lo necesario será aplicar una única rotación al sistema centrado en el punto principal de la imagen para colocar uno de los ejes paralelos a la línea de fuga y creando un nuevo sistema de coordenadas imagen (figura 14A). Esta rotación no afecta a la posición espacial de la imagen. Se aplica al sistema de coordenadas de manera que las coordenadas de cada punto de la imagen se vuelven a calcular con respecto a un nuevo sistema pero su posición espacial permanece invariable. Siendo a y b nuevamente dos puntos de fuga obtenidos por la intersección en la imagen con las líneas rectas paralelas en el objeto espacio, el ángulo generado es:

$$\psi_{\text{obs}} = \text{atan}\frac{(ya - yb)}{(xb - xa)}$$

Una vez el sistema de coordenadas imagen está posicionado, la orientación de la imagen consiste en una rotación ξ en el eje x' paralelo a la línea de fuga:

$$\xi = \text{atan}\frac{-f}{d_{obs}}$$

Siendo: *f* la distancia focal cuidando el signo negativo por estar el plano imagen detrás de la focal y, d_{obs} la distancia observada entre el punto principal y la línea de fuga u horizonte en el espacio imagen (figura 14B) la cual se calcula a partir de la ecuación de la línea de horizonte [6] según:

$$d_{obs} = \frac{|\text{ya xb} - \text{yb xa}|}{\sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2}}$$

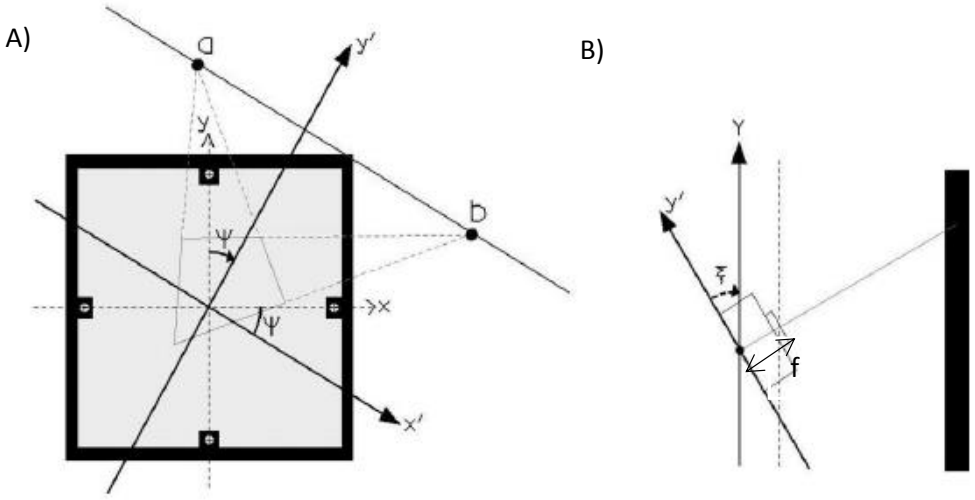


Figura 14: Orientación de la imagen: A) Cambio del sistema de coordenadas en el espacio imagen, rotación ψ y B) Orientación espacial de la imagen ξ (Rodríguez, 2008).

A continuación sólo resta relacionar estos dos últimos ángulos que definen la línea de horizonte, con los anteriormente definidos (*azimuth, tilt* y *swing*).

Se observa que la rotación ξ, se corresponde con el ángulo tilt (rotación en el eje x' paralelo a la línea de fuga) y por tanto con estas premisas ya podemos formar su ecuación correspondiente que definirá la línea de horizonte. Por un lado tenemos:

$$r_{33} = \cos(zz') \rightarrow tilt = \text{acos}(r_{33}) = \text{acos}(cos\varphi\ cos\omega)$$

Además, *tilt* quedaba definido según:

$$tilt = \text{atan}\frac{-f}{d_{obs}} = atan\frac{-f}{\frac{|\text{ya xb} - \text{yb xa}|}{\sqrt{(xb-xa)^2+(yb-ya)^2}}}$$

Igualando ambas expresiones nos queda la siguiente función para la línea de horizonte asociada al ángulo tilt y que está en función únicamente de $\omega\ y\ \varphi$ tal y como queríamos para poder incluirla en el sistema de mínimos cuadrados y resolver con ellas los parámetros de orientación externa:

$$\text{F}_\text{t} \equiv \text{acos}(cos\varphi\ cos\omega) - atan\frac{\frac{-f}{|\text{ya xb}-\text{yb xa}|}}{\sqrt{(xb-xa)^2+(yb-ya)^2}} = 0$$

Si despejáramos la ecuación de otra forma se consigue obtener una $d_{calculada}$ que se usará posteriormente para dibujar la línea de horizonte en la imagen:

$$\tan(\text{acos}(cos\varphi\ cos\omega)) = \frac{-f}{d_{obs}} \rightarrow d_{obs} = \frac{-f}{\tan(\text{acos}(cos\varphi\ cos\omega))} = d_{calculada}$$

Y se podría incluso reescribir la función como:

$$Ft \equiv d_{obs} - d_{calculada} = 0$$

Por otro lado disponemos del ángulo ψ que se corresponde con el ángulo anteriormente llamado como azimuth y por tanto:

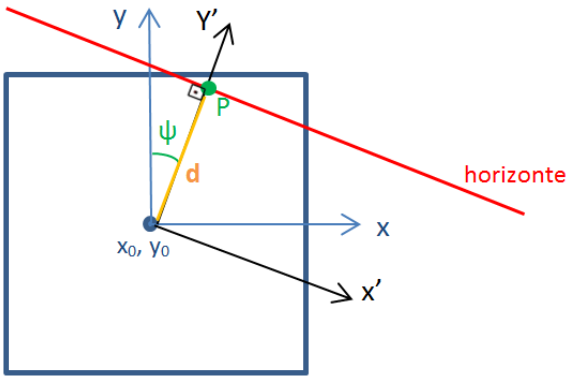
$$\psi_{\text{obs}} = \text{atan}\frac{(ya - yb)}{(xb - xa)} \rightarrow \alpha = \psi_{\text{calculada}} = atan\frac{r_{31}}{r_{32}} = \text{atan}\left(\frac{-sin\varphi}{cos\varphi\ sin\omega}\right)$$

La segunda ecuación relacionada con la línea de horizonte y que intervendrá en nuestro sistema mínimo cuadrático en función de los parámetros $\omega\ y\ \varphi$ será:

$$F\alpha \equiv \text{atan}\frac{(ya - yb)}{(xb - xa)} - \text{atan}\left(\frac{-sin\varphi}{cos\varphi\ sin\omega}\right) = 0$$

Incluir estas ecuaciones en el sistema mínimo cuadrático Ax=K+R, consistirá, como se expondrá posteriormente, en calcular la matriz jacobiana con derivadas parciales únicamente respecto a las variables $\omega\ y\ \varphi$ y, obtener el término independiente del sistema "K" como las funciones evaluadas inicialmente (Ft_0 y $F\alpha_0$).

Para dibujar en la imagen dos puntos de fuga y la línea de horizonte generada y ajustada en cada iteración (conforme se van aproximando los parámetros $\omega\ y\ \varphi$), se calculará $\psi_{\text{calculada}}$ y $d_{\text{calculada}}$, mientras que se pintará también otra línea de horizonte de forma fija a partir de estos dos parámetros pero esta vez los calculados directamente a partir de los dos puntos de fuga con que se han formado las ecuaciones ($\psi_{\text{obs}}\ y\ \ d_{\text{obs}}$).



$$x_P = x_0 + d\ sin\psi$$
$$y_P = y_0 + d\ cos\psi$$
$$pte_H = -\frac{1}{tan(90 - \psi)} = -tan(\psi)$$

$$y - y_P = pte_H(x - x_P)$$

Por tanto otro punto de fuga será:

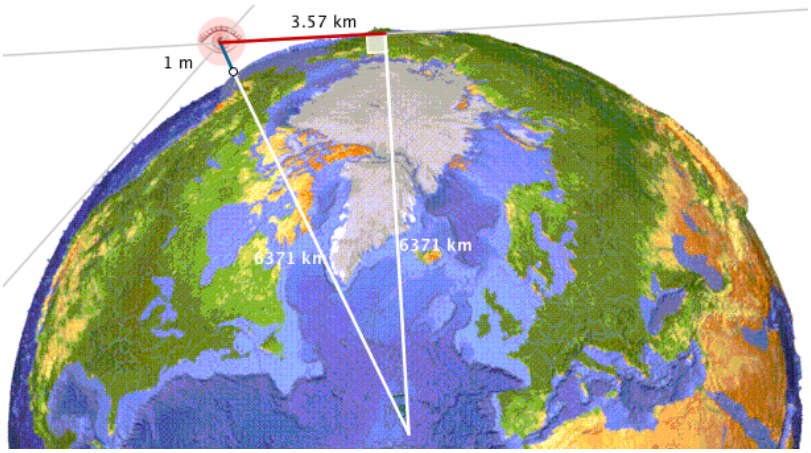
$$x = \frac{y - y_P}{pte_H} + x_P$$
$$y = pte_H\ (x - x_P) + y_P$$

Una vez ya tenemos dos puntos que formaran la línea de horizonte para dibujarlos en la imagen tendremos que trasladar el origen del sistema de estas coordenadas a la esquina superior izquierda de la imagen como ya se ha explicado en otros casos.

3.4.6.1 Corrección de esfericidad terrestre.

La línea de horizonte es aquella en la que parecen juntarse el cielo y la tierra, o el mar y la tierra, si lo que estamos viendo es el mar. Estando en la orilla del mar quién no se ha preguntado alguna vez ¿a qué distancia se encontrará aquél barco que acaba de aparecer por el horizonte o, simplemente, hasta dónde alcanza la vista en esos momentos?

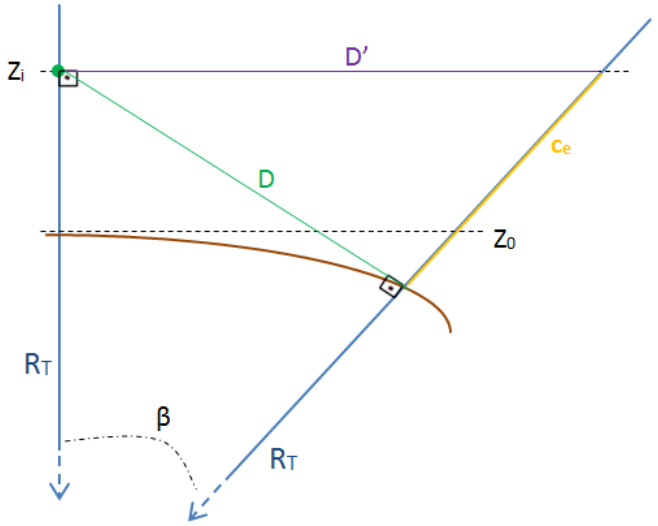
Naturalmente, el alcance de nuestra visual hasta el horizonte va a depender de la altura a la que nos encontremos, así como de los accidentes geográficos que se nos ofrezcan ante nuestra vista. Otro problema añadido es la circunstancia de que la superficie terrestre no es una esfera perfecta sino que se encuentra achatada en los polos.



Imaginémonos sentados en la playa, frente al mar, con nuestra vista a un metro de altura respecto al agua, el horizonte que divisamos se encontrará a tan sólo 3.57 km pero conforme nuestra altura vaya aumentando, la distancia observada al horizonte también lo hará aunque no de forma proporcional. Por ejemplo a una altura de 9m, ya divisamos hasta 10.71 km.

El cálculo de esta distancia a la línea de horizonte se calculará mediante el teorema de Pitágoras resolviendo un triángulo rectángulo y por tanto: $D = \sqrt{(Zi + R_T)^2 - {R_T}^2}$

En este trabajo concreto nos interesa estimar la posición real de la línea de horizonte que aparece en una toma fotográfica terrestre corrigiéndola del efecto de esfericidad terrestre. Para ello en primer lugar se calculará la corrección de esfericidad en el terreno y posteriormente se adaptará para la imagen o espacio foto. El proceso metodológico a seguir se expone a continuación y se basará en obtener la distancia c_e que es la que separa la posición de la línea de horizonte afectada de esfericidad y la línea de horizonte que debería verse en la imagen sin quedar afectada por la esfericidad terrestre.



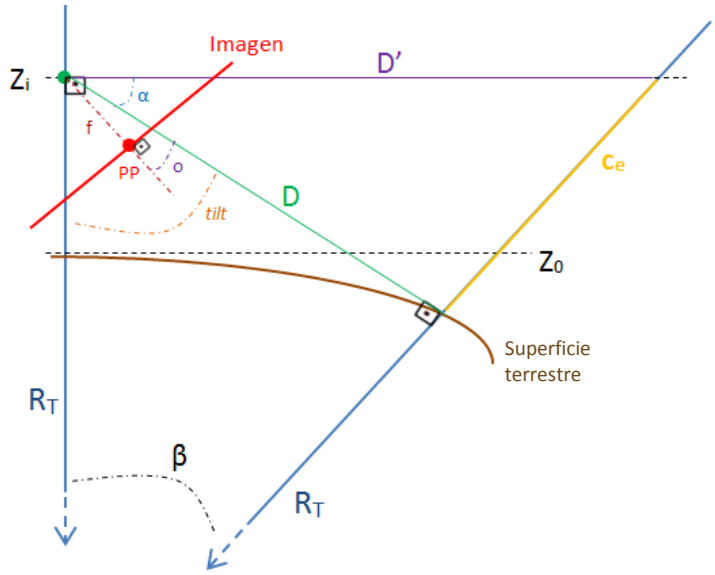
Por relación de triángulos tenemos que: $tan\beta = \frac{D}{R_T} = \frac{D\prime}{R_T+Z_i}$ y que $ce^2 + D^2 = D'^2$

Relacionando ambas expresiones y despejando obtenemos finalmente:

$$\frac{D}{R_T} = \frac{\sqrt{ce^2+D^2}}{R_T+Z_i} \rightarrow D\,(R_T + Z_i) = R_T\sqrt{ce^2 + D^2} \rightarrow \quad ce = \sqrt{\left(\frac{D\,(R_T+Z_i)}{R_T}\right)^2 - D^2}$$

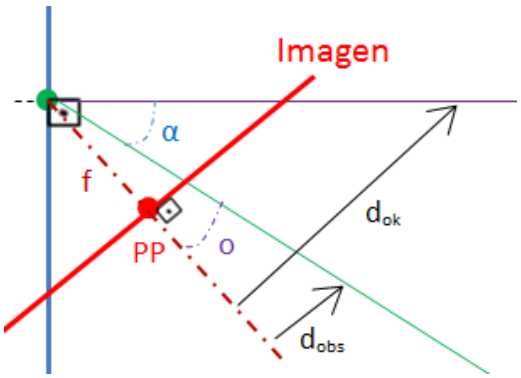
Según la ecuación obtenida se comprueba que efectivamente cuando Zi=0, esta distancia "c_e" también se convertirá en valor nulo.

A continuación se pretende calcular el equivalente a esta distancia en el espacio foto, pero para ello no podremos usar el ángulo *tilt* ya que el valor de este ángulo calculado estará afectado por la curvatura terrestre y es justamente eso lo que se pretende corregir.



$$tan \propto = \frac{ce}{D} \rightarrow \propto = atan \frac{ce}{D}$$

Se pretende buscar las relaciones geométricas entre los ángulos de la figura y las distancias del punto principal a la línea de horizonte afectada de esfericidad (d_{obs}) y sin error de esfericidad (d_{ok}). Las expresiones son las siguientes:



$$tan\ o = \frac{d_{obs}}{f} \rightarrow\ o = atan \frac{d_{obs}}{f}$$

$$o' = o + \alpha$$

$$tan\ o' = \frac{d_{ok}}{f} \rightarrow\ \boldsymbol{d_{ok}} = tan\ o' * f = \tan\left(\text{atan}\left(\frac{ce}{D}\right) + \text{atan}\left(\frac{d_{obs}}{f}\right)\right) * f$$

Una vez obtenida la distancia correcta (d_{ok}) ya podemos sustituir esta por la d_{obs} en la función obtenida en el apartado anterior que definía la línea de horizonte según el ángulo *tilt* (F_t). No obstante previamente a este último paso se simplificará la expresión obtenida para la distancia correcta según la siguiente propiedad de la tangente:

$$\tan(A+B) = \frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)*\tan(B)} \equiv \tan\left(\overset{A}{\text{atan}\left(\frac{ce}{D}\right)} + \overset{B}{\text{atan}\left(\frac{d_{obs}}{f}\right)}\right)$$

Por tanto:

$$\tan(A+B)=\frac{\tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{ce}{D}\right)\right)+\tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{d_{obs}}{f}\right)\right)}{1-\tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{ce}{D}\right)\right)*\tan\left(\operatorname{atan}\left(\frac{d_{obs}}{f}\right)\right)}=\frac{\frac{ce}{D}+\frac{d_{obs}}{f}}{\frac{Df-ce\,d_{obs}}{Df}}=\frac{ce\,f+D\,d_{obs}}{Df-ce\,d_{obs}}$$

Con esta nueva expresión ya podemos reescribir la función F_t corregida de esfericidad terrestre de la siguiente forma:

$$\mathrm{F_t}\equiv \operatorname{acos}(cos\varphi\ cos\omega)-atan\frac{-f}{\mathrm{d_{ok}}}=0\ \rightarrow \mathrm{F_t}\equiv \operatorname{acos}(cos\varphi\ cos\omega)-atan\frac{-f}{f\ \frac{ce\,f+D\,d_{obs}}{Df-ce\,d_{obs}}}=$$

$$=\operatorname{acos}(cos\varphi\ cos\omega)-atan\left(\frac{-(Df-ce\,d_{obs})}{ce\,f+D\,d_{obs}}\right)$$

Y finalmente nos queda la expresión:

$$\boxed{\mathrm{F_t}\equiv \operatorname{acos}(cos\varphi\ cos\omega)-\operatorname{atan}\left(-\frac{f-\left(\frac{d_{obs}\,ce}{D}\right)}{d_{obs}+\left(\frac{f\,ce}{D}\right)}\right)=0}$$

3.4.7 Proyección espacial.

El cálculo de las coordenadas (X, Y, Z) de un punto tridimensional terreno/objeto es sencillo una vez conocemos la orientación y posición de la cámara con que se tomó la fotografía.

A partir de los parámetros TLD ya calculados y refinados (obtenidos a partir de los parámetros de orientación externa refinados), el paso del sistema imagen (2D) a terreno (3D), supondrá el establecer un constreñimiento para la coordenada Z ya que de lo contrario el sistema de ecuaciones sería indeterminado, dos ecuaciones frente a tres incógnitas (Holland, 1997). En nuestro trabajo constreñiremos la Z a un valor fijo que se corresponderá con el nivel medio del mar (Z=0). De este modo, conocida la elevación, será posible asignar todas las intensidades de los píxeles dentro de una región de la imagen oblicua a otra rectificada, una imagen plana con coordenadas terreno, es decir, georreferenciada.

Despejando de las ecuaciones generales de la TLD y cambiando la nomenclatura de los parámetros (a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2,a_3,b_3,c_3 por L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{10}, L_{11}) nos queda:

$$x - L_4 = X(L_1 - xL_9) + Y(L_2 - xL_{10})$$

$$y - L_8 = X(L_5 - yL_9) + Y(L_6 - yL_{10})$$

A partir de éstas ecuaciones despejamos las variables X e Y para calcularlas directamente y que el proceso de cálculo para el programa sea más rápido y efectivo que la resolución de un nuevo sistema mínimo cuadrático. En primer lugar se despeja la coordenada X:

$$\boxed{\mathrm{X} = \frac{(\mathrm{x} - \mathrm{L}_4) - \mathrm{Y}(\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_{10}\mathrm{x})}{\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_9\mathrm{x}}}$$

Sustituyendo X en la siguiente ecuación y desarrollando obtenemos:

$$y - L_8 = \frac{(x - L_4) - Y(L_2 - L_{10}x)}{L_1 - L_9x} * (L_5 - L_9y) + Y(L_6 - L_{10}y) \rightarrow$$

$$[(y - L_8) - Y(L_6 - L_{10}y)] * (L_1 - L_9x) = [(x - L_4) - Y(L_2 - L_{10}x)] * (L_5 - L_9y) \rightarrow$$

$$(y - L_8) * (L_1 - L_9x) - Y(L_6 - L_{10}y) * (L_1 - L_9x) = (x - L_4) * (L_5 - L_9y) - Y(L_2 - L_{10}x) * (L_5 - L_9y) \rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{Y} = \frac{(\mathrm{y} - \mathrm{L}_8) * (\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_9\mathrm{x}) - (\mathrm{x} - \mathrm{L}_4) * (\mathrm{L}_5 - \mathrm{L}_9\mathrm{y})}{(\mathrm{L}_6 - \mathrm{L}_{10}\mathrm{y}) * (\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_9\mathrm{x}) - (\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_{10}\mathrm{x}) * (\mathrm{L}_5 - \mathrm{L}_9\mathrm{y})}}$$

Por otro lado, la intersección espacial mediante las ecuaciones de colinealidad se resolvería según los parámetros de orientación externa e interna. Para ello, el sistema de ecuaciones a resolver sería: $A_{(2xGPC,\ 2)}\ x\ _{(2xGCP,\ 1)} = K_{(2xGCP,\ 1)}$; solución más costosa para el programa.

$$A = \begin{bmatrix} (x - x_0)m_{31} - fm_{11} & (x - x_0)m_{32} - fm_{12} \\ (y - y_0)m_{31} - fm_{21} & (y - y_0)m_{32} - fm_{22} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} A_{11}X0 + A_{12}Y0 + A_{13}Z0 \\ A_{21}X0 + A_{22}Y0 + A_{23}Z0 \end{bmatrix}$$

Cualquiera de estos dos procedimientos, permiten obtener las coordenadas terreno de cualquier punto de la imagen. En este proyecto, se usará para proyectar los bordes de la fotografía o de un fragmento de imagen seleccionado por el usuario, y conocer así las dimensiones terreno que éste ocupa en la realidad.

3.4.7.1 Remuestreo de la imagen.

Una vez conocidas las dimensiones terreno de la imagen a proyectar, se realizará una especie de grid o cuadrícula con un tamaño de pixel (en coordenadas terreno) seleccionado por el usuario que generará la imagen proyectada resultante. De este modo se salva el problema de que cada pixel se proyecte en el plano de forma no equiespaciada por la proyectividad.

Para cada pixel de la imagen a generar, que equivale a unas coordenadas terreno concretas, se buscaran sus coordenadas pixel correspondientes en la fotografía de entrada para así asignar la radiometría de ésta en la imagen resultado. Este último paso se podría realizar siguiendo el método del vecino más próximo o bien por cualquier otro método de interpolación.

Una vez más, podremos convertir de coordenadas tridimensional (X, Y, Z) a coordenadas pixel (x, y) bien mediante las ecuaciones de colinealidad o por el método de TLD.

Además, en esta transformación se tendrá que tener especial atención en la coordenada Z terreno ya que dependiendo de en qué cota se quiera proyectar la imagen, el resto de puntos sufrirán cierto desplazamiento. Para este proyecto donde el objetivo es poder medir y detectar sobre una fotografía la línea de costa lo más precisa posible, la proyección se podrá realizar bien sobre el nivel del mar (Z=0), proyectando sobre un plano de cota constante por ejemplo un valor promedio de la línea de costa tomada con GPS, o bien con un Modelo Digital del Terreno que represente el sector costero.

En los tres casos a priori la línea de costa quedará correctamente georreferenciada en X e Y ya que la Z será muy similar, próxima a cero. Sin embargo, siguiendo los dos primeros casos (proyección sobre Z=0 o sobre un valor promedio constante determinado por GPS), el resto de puntos presentaran un cierto desplazamiento cada vez mayor cuanto más se aleje la coordenada Z del valor en que se ha efectuado la proyección. Con el tercer método, la imagen resultante proyectada será más real por toda su extensión ya que cada punto se proyectará según su cota aproximada teniendo en cuenta que el MDT tendrá ciertas limitaciones debido a la interpolación con que ha sido generado.

La formulación a seguir para consultar qué valor de la imagen (x, y) debe tener una coordenada del plano terreno (X,Y,Z) mediante los parámetros TLD es la siguiente:

$$x = \frac{a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1}{a_3X + b_3Y + c_3Z + 1}$$

$$y = \frac{a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2}{a_3X + b_3Y + c_3Z + 1}$$

De este modo, cuando se pretenda proyectar sobre el plano Z=0, el tercer sumando se anulará.

Y por colinealidad, la transformación de un punto 3D a 2D se hará según las fórmulas generales:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \mathrm{f}\frac{m_{11}(X - X0) + m_{12}(Y - Y0) + m_{13}(Z - Zo)}{m_{31}(X - X0) + m_{32}(Y - Y0) + m_{33}(Z - Zo)}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}_0 + \mathrm{f}\frac{m_{21}(X - X0) + m_{22}(Y - Y0) + m_{23}(Z - Zo)}{m_{31}(X - X0) + m_{32}(Y - Y0) + m_{33}(Z - Zo)}$$

En el caso concreto de proyectar sobre el plano Z=0, nos quedará:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \mathrm{f}\frac{m_{11}(X - X0) + m_{12}(Y - Y0) + m_{13}(0 - Zo)}{m_{31}(X - X0) + m_{32}(Y - Y0) + m_{33}(0 - Zo)}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}_0 + \mathrm{f}\frac{m_{21}(X - X0) + m_{22}(Y - Y0) + m_{23}(0 - Zo)}{m_{31}(X - X0) + m_{32}(Y - Y0) + m_{33}(0 - Zo)}$$

4. PROGRAMACIÓN Y APLICACIÓN

4.1. Calibración de la cámara y corrección de la fotografía

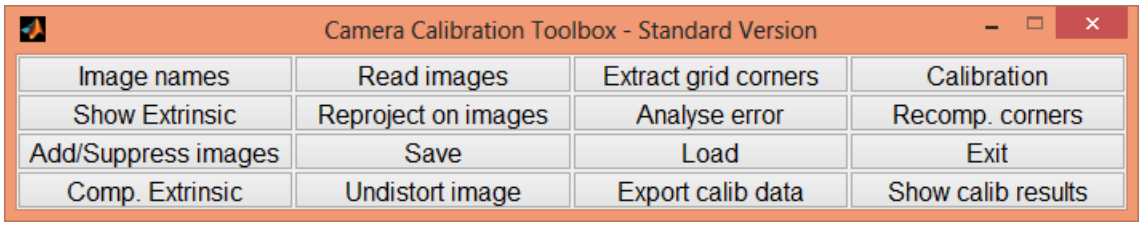
Este proceso metodológico se va a realizar con la herramienta "Calibration Toolbox" del software Matlab (Bouguet, 1999).

Esta herramienta nos proporcionará la longitud focal en píxeles (fc), las coordenadas del punto principal (cc), el coeficiente oblicuo que define el ángulo entre los ejes x e y del píxel (alpha_c) y, los coeficientes de distorsión de la imagen (distorsiones radiales y tangenciales; kc). Además calculará las estimaciones de las incertidumbres en esos parámetros que representaran aproximadamente el triple de las desviaciones estándar de los errores de estimación.

Las cámaras actualmente fabricadas no justifican siempre este modelo óptico tan general. Ahora se está acostumbrado a asumir los píxeles rectangulares, y asumir así alpha_c=0. Ese es el ajuste por defecto del toolbox (el coeficiente oblicuo no se estima). Además, el modelo genérico de distorsión no se considera a menudo totalmente, se suele obviar la parte radial de sexto orden y desecharse el componente tangencial de la distorsión ya que la mayoría de las lentes fabricadas actualmente no tienen imperfección en el centro. La distorsión radial simétrica de cuarto orden sin componente tangencial (los tres últimos componentes de kc se fijan a cero) es el modelo de distorsión usado por Zhang, 1999.

Otro modelo muy común de distorsión para los buenos sistemas ópticos es el modelo radial simétrico de distorsión de segundo orden en el que sólo se estima el primer componente del vector kc mientras que los otros cuatro se fijan a cero.

Para poner en funcionamiento esta herramienta de calibración hay que llamar a la función "calib_gui.m o calib.m". La ventana principal del toolbox calibration aparecerá tal y como se muestra a continuación:



Esta herramienta de calibración de una cámara necesita en primer lugar la realización de una serie de imágenes a un patrón a modo de tablero de ajedrez con la cámara que se

pretende calibrar. A continuación calibraremos una cámara digital de nivel usuario “PENTAX Optio H90” con una resolución de 12MP y un tamaño de imagen de 4000x3000. Es importante que las fotografías salgan nítidas y para ello puede ayudar el uso de un trípode. La focal ha de estar enfocada al infinito (sin zoom) y se han de obtener las fotografías con diferentes ángulos para conseguir detectar las posibles distorsiones más fácilmente.

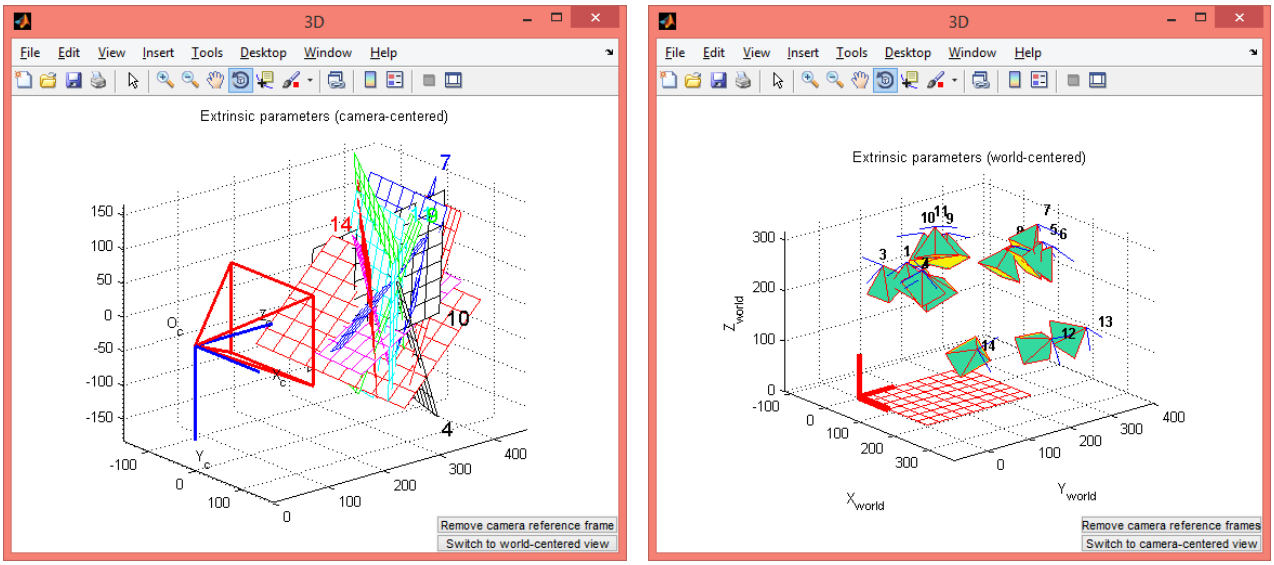
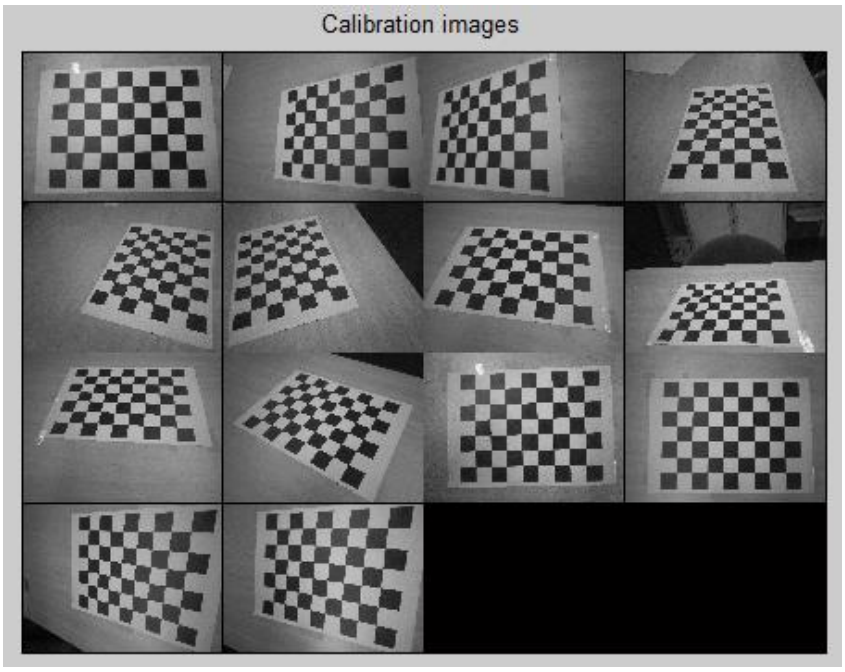
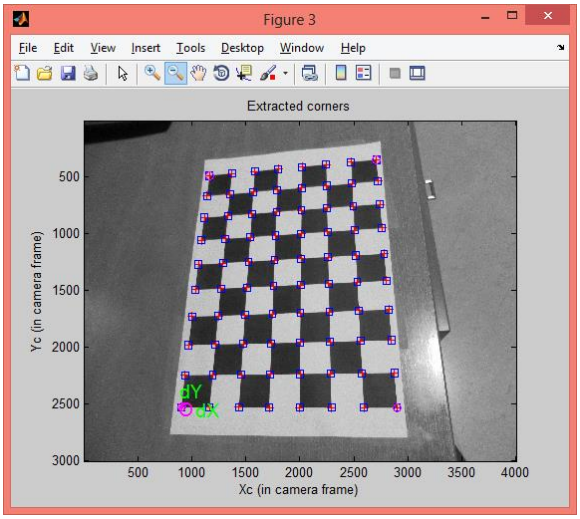


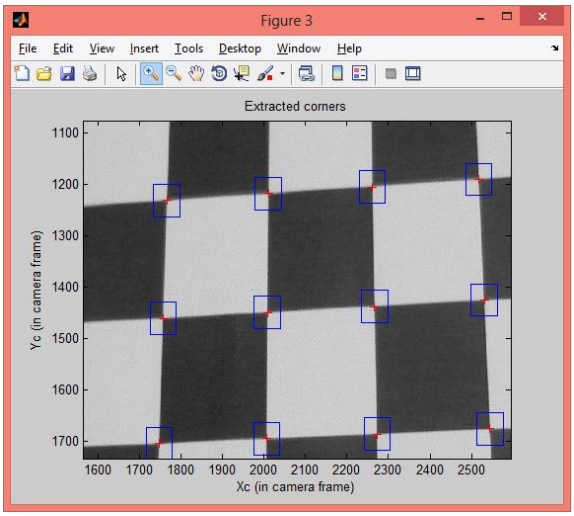
Figura 15: Posiciones relativas de las mallas con respecto a la cámara (imagen izquierda). Campo visual eficaz de cada cámara definida por el plano imagen (captura derecha).

La carga de las imágenes se hace clicando el botón “Image names” y nos salen por pantalla con “read images”:



El siguiente paso consiste en la extracción de las cuatro esquinas externas del patrón de la imagen “extract grid corners”. Para ello se definirá un tamaño de ventana de buscador de esquinas eficaz de 11x11 píxeles. El motor de extracción de esquinas incluye un mecanismo automático para contar el número de cuadrados presentes en la malla en las direcciones x e y del patrón y requiere que el orden de clicado sea el mismo en todas las fotografías así como el valor del tamaño del pixel (28x28mm para el patrón utilizado).





Las esquinas se extraen con una exactitud de cerca de 0.1 pixel. No obstante, a veces las esquinas predichas no están muy cerca de las esquinas verdaderas de la imagen, y eso es un problema para obtener una extracción de las esquinas eficaz. En este caso es necesario mejorar la predicción de las mismas incorporando una aproximación para el primer coeficiente de distorsión de la lente.

Tras la extracción de esquinas, se procede con el botón de inicio de la calibración de cámaras. La calibración se realiza en dos pasos: primero una inicialización que computa una solución analítica para los parámetros de calibración sin incluir ninguna distorsión de la lente, y después una optimización no lineal que reduce al mínimo el error de reproyección de todos los puntos según los parámetros de calibración. La optimización se realiza por minimización iterativa del gradiente con un cálculo explícito (de manera analítica) de la matriz Jacobiana.

Los resultados obtenidos inicialmente son los siguientes:

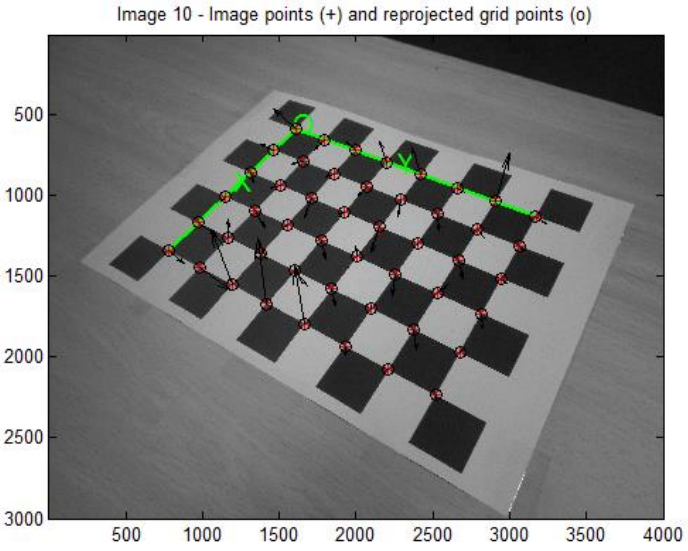
Initialization of the intrinsic parameters - Number of images: 14

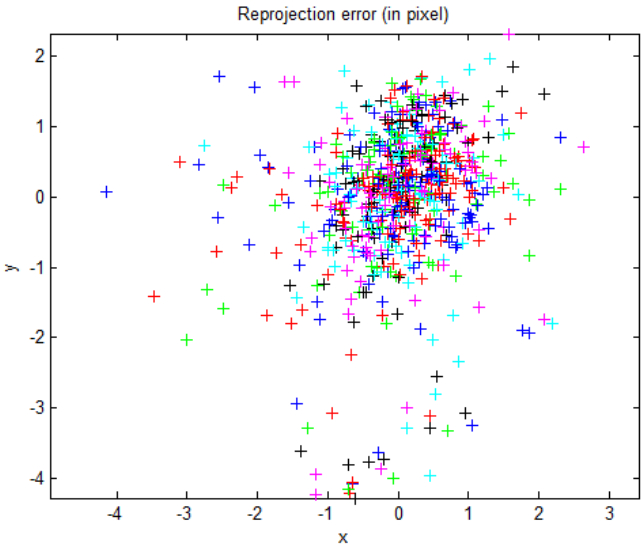
Calibration parameters after initialization:
Focal Length: fc = [3409.52527 3409.52527]
Principal point: cc = [1999.50000 1499.50000]
Skew: alpha_c = [0000] => angle of pixel = 90000 degrees
Distortion: kc = [0000 0000 0000 0000 0000]
Main calibration optimization procedure - Number of images: 14

Gradient descent iterations:
1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...11...12...13...14...15...16...17...18...19...20...done
Estimation of uncertainties...done

Calibration results after optimization (with uncertainties):
Focal Length: fc = [3374.61080 3365.53807] ± [8.90345 8.89017]
Principal point: cc = [2041.61933 1529.83492] ± [11.30125 9.29457]
Skew: alpha_c = [0000] ± [0000] => angle of pixel axes = 90000 ± 0000 degrees
Distortion: kc = [-0850 -0408 0182 0186 0000] ± [0879 0.03403 0090 0114 0000]
Pixel error: err = [0.81572 1.05915]

Note: The numerical errors are approximately three times the standard deviations (for reference).





El error de reproyección es demasiado grande para juzgar la complejidad del modelo porque algunas de las esquinas de la malla no fueron extraídas con mucha exactitud para una serie de imágenes. Por tanto clicaremos sobre "reproject on images" en la herramienta de calibración para mostrar la reproyección de las mallas sobre las imágenes originales. Estas proyecciones se computan basándose en los parámetros intrínsecos y extrínsecos actuales.

En el diagrama de error se constata que el error de reproyección es grande en la mayoría de figuras ya que no se ha hecho un trabajo muy cuidadoso a la hora de extraer las esquinas en algunas imágenes que estaban muy distorsionadas. Podemos ahora corregir eso recalculando las esquinas de la imagen en todas las imágenes automáticamente "*recomp. corners*".

A continuación ya podemos iniciar otra optimización de la calibración y obtenemos:

Re-extraction of the grid corners on the images (after first calibration)
Window size for corner finder (wintx and winty):
wintx ([] = 5) =
winty ([] = 5) =
Window size = 11x11

Number(s) of image(s) to process ([] = all images) =
Use the projection of 3D grid or manual click ([]=auto, other=manual):
Processing image 1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...11...12...13...14...
done

Calibration results (with uncertainties):

Focal Length: fc = [3390.56728 3380.88416] ± [8.81843 8.89070]
Principal point: cc = [1999.50000 1499.50000] ± [0000 0000]
Skew: alpha_c = [0000] ± [0000] => angle of pixel axes = 90000 ± 0000 degrees
Distortion: kc = [-0741 0070 -0052 -0175 0000] ± [0985 0.03866 0058 0055 0000]
Pixel error: err = [1.20816 1.27234]

Note: The numerical errors are approximately three times the standard deviations (for reference).

Se observa que ahora sólo seis iteraciones han sido necesarias para la convergencia.

A continuación, para tomar una decisión apropiada a la hora de elegir el método de calibración, es a veces muy útil visualizar el efecto de las distorsiones en los píxeles de la imagen, y la importancia de la componente radial contra el componente tangencial de la distorsión "*visualize_distortions*". Las imágenes producidas son:

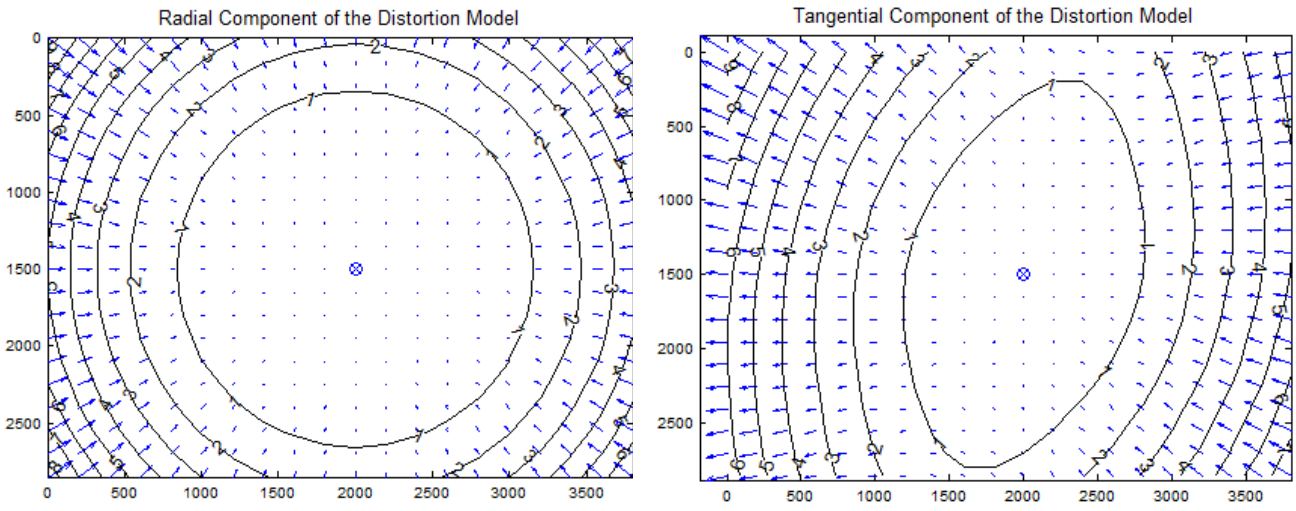


Figura 16: La figura de la izquierda muestra el impacto del componente de distorsión radial y la figura de la derecha muestra el impacto del componente de distorsión tangencial. En ambas imágenes la cruz indica el centro de la imagen y el círculo la localización del punto principal.

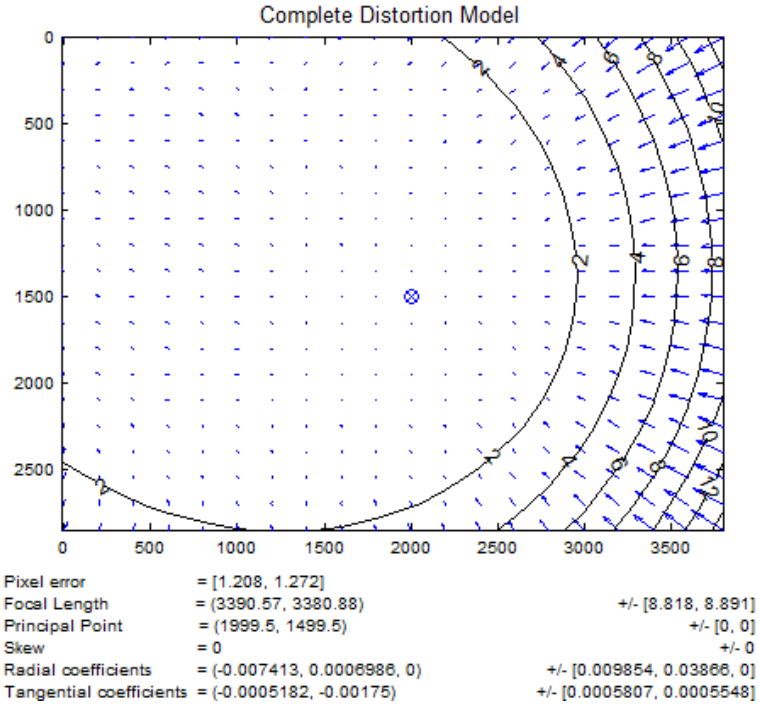
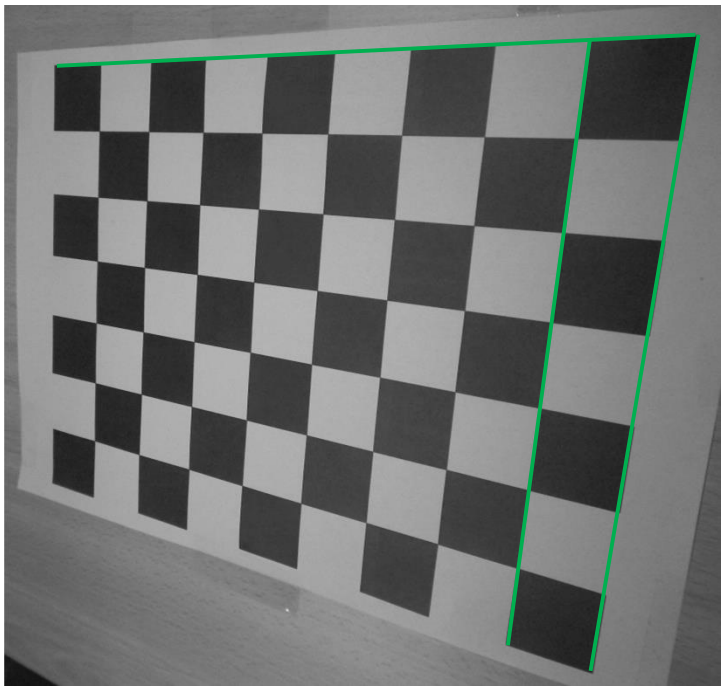


Figura 17: La figura muestra el impacto completo del modelo de distorsión (radial + tangencial) en cada pixel de la imagen. Cada flecha representa el desplazamiento efectivo de cada pixel inducido por la distorsión de la lente. Se observa que los puntos en las esquinas presentan mayores errores.

Los parámetros de orientación interna obtenidos para la cámara son finalmente:

	PENTAX Optio H90 *(la del ejemplo)*	SAMSUNG ST60
Focal (pixels)	(3390.57+3380.88)/2	(3161.89512+3163.70745)/2
x0 (pixels)	1499.5	1480.41775
y0 (pixels)	1999.5	2022.91032

Por último resta el corregir la imagen que se desee de las distorsiones calculadas de la cámara "*undistort image*". Para ello usaremos igualmente unas funciones de la herramienta "*calibration toolbox"* pero modificadas ya que era necesario suplir el inconveniente que éstas presentaban. Tras corregir la imagen de distorsiones devolvían la imagen en escala de grises y nosotros necesitábamos mantenerla en color. Por ello se usó un programa que trabajara corrigiendo cada una de las bandas de la imagen original (R, G, V). Corrige las coordenadas imagen de las diferentes distorsiones de la cámara y se les asocia mediante interpolación bilineal el color que le pertenece a cada pixel corregido. Finalmente en el resultado obtenido para una de las imágenes realizadas al patrón se comprueba cómo ha habido algunas pequeñas correcciones y ahora las líneas que dibujan el patrón son perfectamente rectas mientras que antes presentaban una débil curvatura prácticamente inapreciable para el ojo humano.



4.2. Casos sintéticos

Para realizar cada una de las pruebas de todo el proceso metodológico que conlleva la proyección de una fotografía terrestre, se generaron una serie de escenarios sintéticos que abarcaran unas dimensiones terreno mucho más pequeñas que la fotografía de la costa y por tanto nos permitirán trabajar con mayor efectividad y rapidez.

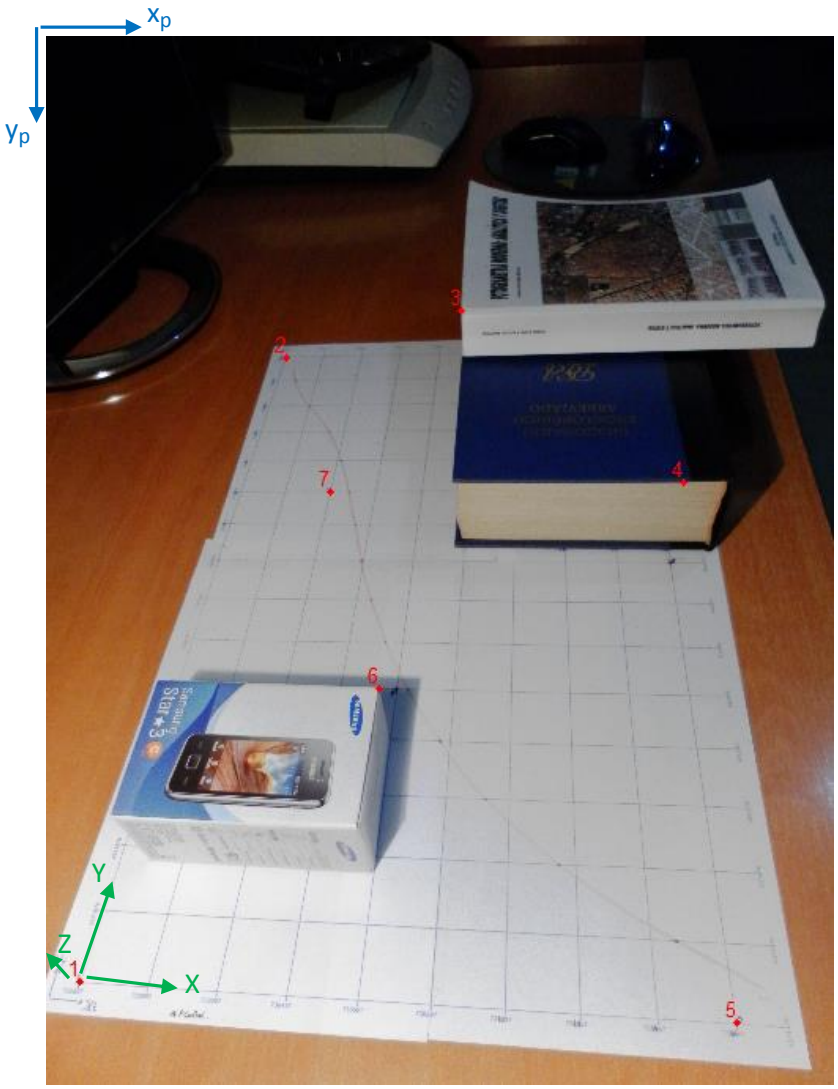
A continuación se detallará la secuencia de pasos realizada ejemplificándola con algunos de estos escenarios generados.

4.2.1. Primer escenario

En primer lugar, para establecer el vínculo entre el espacio terreno 3D (X, Y, Z) y el espacio imagen 2D (xp, yp), necesitamos una serie de puntos de apoyo. Como procederemos calculando inicialmente la TLD directa, necesitaremos un mínimo de 6 puntos. De lo contrario, si aplicásemos directamente por ejemplo colinealidad únicamente se requerirían tres puntos.

Por tanto, se crea un fichero para cada escenario que contenga las coordenadas imagen (píxel) y terreno de los puntos de control que intervendrán en la proyección. La herramienta generada leerá las coordenadas terreno y permitirá situar visualmente cada punto en la imagen en perspectiva. Además, almacenará, en el caso que el usuario lo requiera, el peso de cada observable dependiendo de la precisión con que haya sido detectado (desviación estándar).

A continuación se muestra el ejemplo del escritorio:



Punto	xp (columnas)	yp (filas)	X (cm)	Y (cm)	Z (cm)
1	129.5	3608.5	0	0	0
2	915.5	1232.5	0	49.8	0
3	1581.5	1052.5	16.4	39.3	9.4
4	2427.5	1706.5	30	27.7	6.3
5	2631.5	3764.5	30	0	0
6	1269.5	2492.5	13.3	13.3	5.2
7	1083.5	1742.5	6.6	33.2	0

En estos escenarios el sistema de coordenadas terreno es local pero cuando se utilice la fotografía del litoral, se utilizará un sistema global como es el sistema ETRS89 en proyección UTM.

A continuación se obtendrán los parámetros TLD mediante las fórmulas de resección espacial para una imagen fotográfica. Previamente se ha de tener en cuenta que las coordenadas pixel hay que transformarlas al sistema de coordenadas fiducial con origen en el punto principal de la imagen. La conversión por tanto es:

$$x_f = xp - x_{PP}$$
$$\mathrm{y_f} = -(\mathrm{yp} - \mathrm{y_{PP}})$$

Para el ejemplo del escritorio el sistema mínimo cuadrático es:

$A_{(2*GCP,\ 11)}$ =

-13.76	-23.33	0	1	0	0	0	0	-18840.41	-31948.48	0
0	0	0	0	-13.76	-23.33	0	1	-22142.12	-37547.34	0
-13.76	26.47	0	1	0	0	0	0	-8027.29	15446.08	0
0	0	0	0	-13.76	26.47	0	1	10544.85	-20290.35	0
2.64	15.97	9.40	1	0	0	0	0	-218.04	-1317.64	-775.50
0	0	0	0	2.64	15.97	9.40	1	-2501.46	-15116.96	-8897.10
16.24	4.37	6.30	1	0	0	0	0	-15081.49	-4058.87	-5849.55
0	0	0	0	16.24	4.37	6.30	1	-4751.04	-1278.64	-1842.75
16.24	-23.33	0	1	0	0	0	0	-18395.04	26419.61	0
0	0	0	0	16.24	-23.33	0	1	28676.76	-41186.59	0
-0.46	-10.03	5.20	1	0	0	0	0	-104.91	-2301.56	1193.40
0	0	0	0	-0.46	-10.03	5.20	1	-225.60	-4949.10	2566.20
-7.16	9.87	0	1	0	0	0	0	-2973.79	4101.58	0
0	0	0	0	-7.16	9.87	0	1	1835.81	-2532.02	0

$K_{(2*GCP,\ 1)}$ =

-1369.5
-1609.5
-583.5
766.5
82.5
946.5
928.5
292.5
1132.5
-1765.5
-229.5
-493.5
-415.5
256.5

$r_{(2*GCP,\ 1)}$ =

0.53
-1.57
-2.58
-1.77
-2.66
-1.33
3.58
-0.06
-3.18
-1.03
0.47
2.48
3.85
3.29

$\mathbf{x}_{(11,\ 1)}$ =

58.03
3.50
-4.70
-86.00
-2.55
43.62
42.83
-155.01
0
0.01
-0.02

Representamos los residuos visualmente:

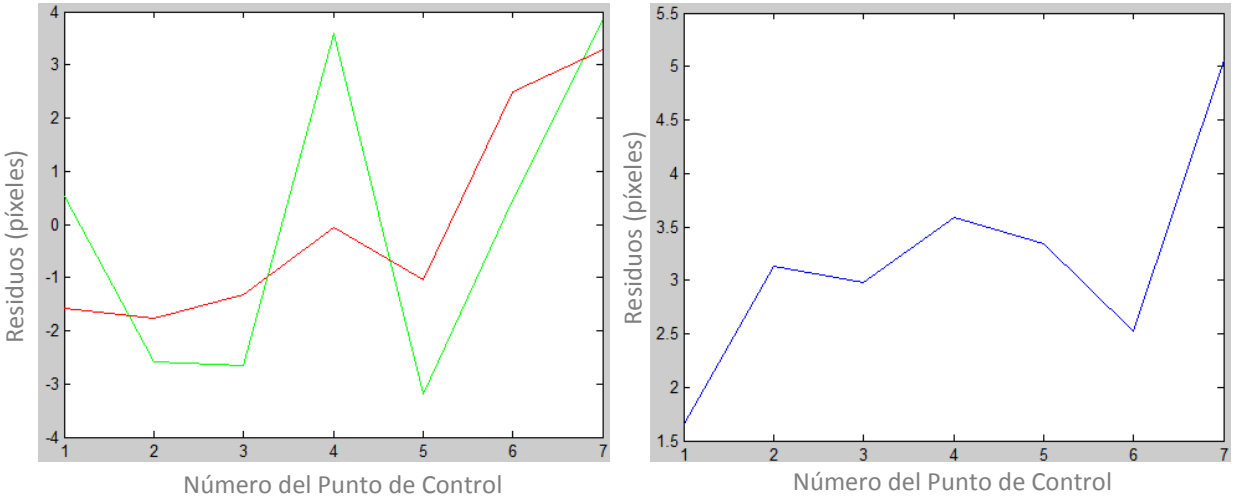


Figura 18: El gráfico de la izquierda muestra en color verde los residuos en la coordenada x (columnas) de los puntos de control, mientras que el color rojo representa los residuos en la coordenada y (filas). El gráfico de la derecha muestra el residuo total de cada punto de control.

De este modo podemos apreciar qué puntos son los que más incomodan al ajuste. En este caso el punto con mayor error será el punto 7 con unos residuos de entre 3 y 4 píxeles.

Por último el estimador de la variable de peso unidad será el que nos permita finalmente seguir con el proceso o rechazar el ajuste. Para el ejemplo mostrado se obtiene un error mínimo cuadrático de 5.08 píxeles que se considera aceptable por ser una primera aproximación de los parámetros TLD, es decir, de la relación entre espacio terreno e imagen.

El siguiente paso será obtener los parámetros de orientación externa aproximados directamente de la transformación TLD. La posición de la cámara y su orientación (los dos grupos de ángulos posibles), así como los factores de escala "h" y el de falta de perpendicularidad "d" de los ejes coordenados:

X0 = 5.386 cm
Y0 = -25.104 cm
Z0 = 29.506 cm
ω1= 0.519 rad ω2= 3.661 rad
φ1= 0.0147 rad φ2= 3.127 rad
κ1= 0.0225 rad κ2= 3.164 rad
h= 1.017
d= -0.0377

A continuación, y una vez recreado el momento de la toma de la imagen, habrá que mejorar los parámetros obtenidos de orientación externa según el método iterativo de colinealidad.

El sistema minimo cuadrático que a continuación se muestra es el generado a partir del proceso iterativo de colinealidad con seis parámetros. Los parámetros de orientación interna (x0,y0,focal) se mantendran fijos porque son los que proceden de la calibración de la cámara (en este caso para el ejemplo del escritorio, se realizó con la cámara SAMSUNG ST60).

Las coordenadas del punto principal de la imagen se obtienen en el programa "*Camera calibration Toolbox*" siempre considerando la imagen verticalmente (x0<y0). Por tanto, el programa deberá detectar cuál es la posición de la imagen de entrada que se pretende proyectar y, en el caso en que la imagen sea horizontal, invertir estas coordenadas (x0>y0).

Los resultados que se muestran en los pasos siguientes se corresponden primero con una resolución del sistema minimo cuadrático por Gauss-Newton, en segundo lugar se muestra la resolución por el método de Levenberg-Marquardt sin escalado y por último con escalado.

El proceso de cálculo terminará con 9 iteraciones resolviendo por Gauss-Newton, con 8 iteraciones mediante Levenberg-Marquardt sin escalado y en la 10 cuando se considera el escalado. Para los tres métodos, el estimador de peso unidad a posteriori es de 21.268 píxeles.

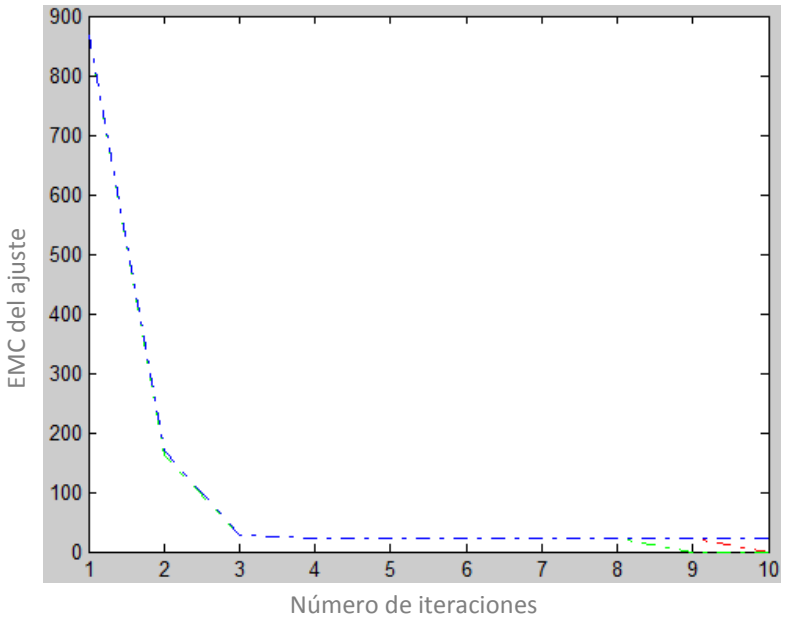


Figura19: El gráfico muestra en color rojo cómo ha sido la resolución del sistema por Gauss-Newton, en verde por Levenberg-Marquardt sin escalado y en azul con escalado.

Independientemente de la fórmula de resolución, los parámetros de orientación externa obtenidos y sus correspondientes parámetros TLD son:

X0 = 7.174 cm	L1=59.605
Y0 = -32.376 cm	L2=4.432
Z0 = 41.101 cm	L3=-4.641
ω1= 0.709 rad	L4=-93.364
φ1= 0.082 rad	L5=-0.309
κ1= 0.078 rad	L6=45.309
	L7=39.256
	L8=-144.317
	L9=-0.0021
	L10=0.012
	L11=-0.014

Se observa cómo los p-valores de los diferenciales (matriz de parámetros x) poco a poco van aproximándose a la unidad, indicando así que las correcciones a realizar en los parámetros de OE introducidos incialmente son necesarias pero tras cada iteración van perdiendo significancia ya que efectivamente los parámetros de orientación externa van mejorando, se van corrigiendo satisfactoriamente.

En la siguiente imagen se muestran por colores las tres primeras iteraciones. Se observa que el resultado va convergiendo correctamente al resultado esperado y cada punto de control se aproxima a su posición real ya que en la primera iteración ni siquiera aparecen los siete puntos de control dentro de los límites de la fotografía (faltan los puntos 1 y 3).

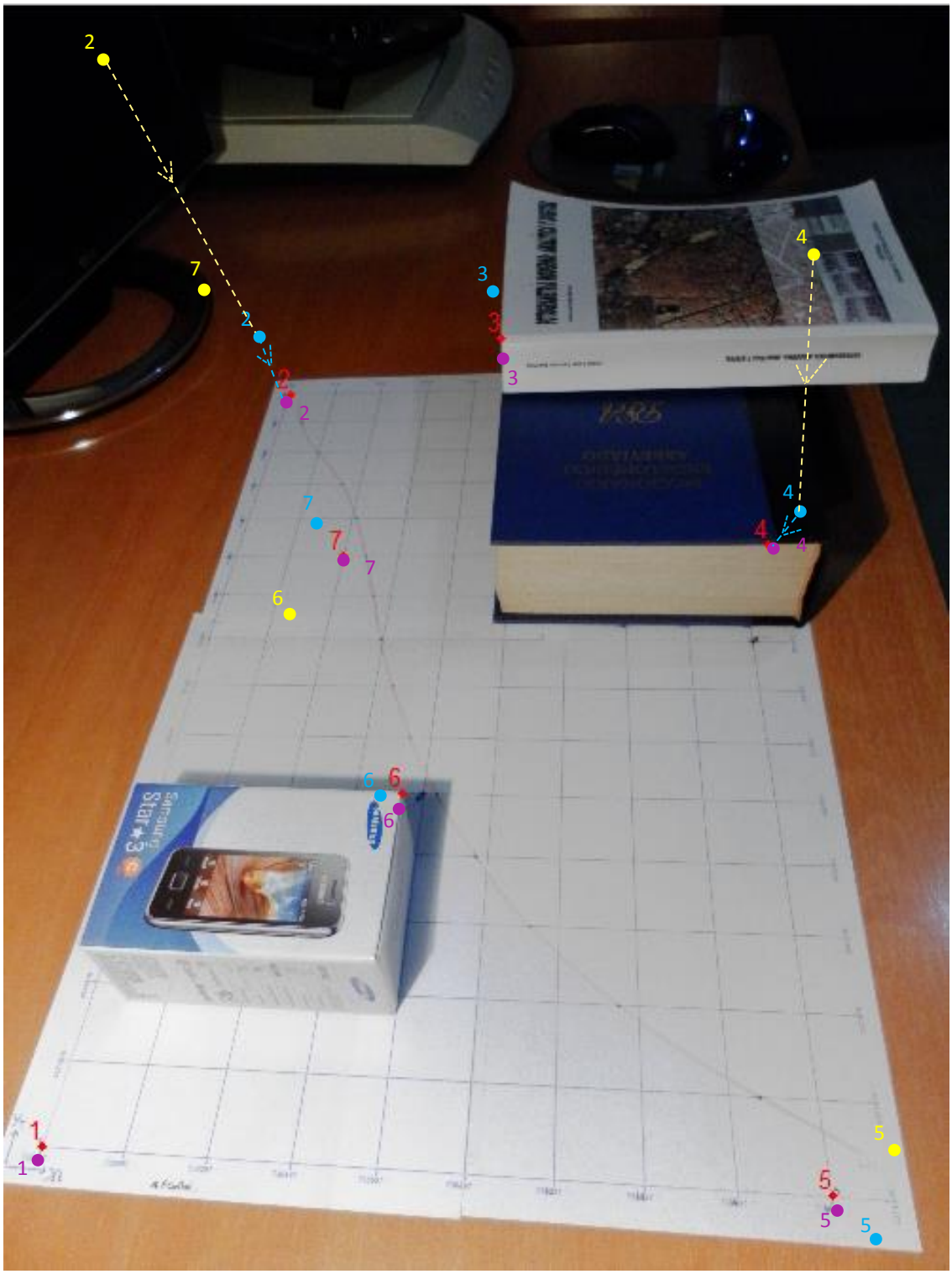


Figura 20: En la imagen se muestra en puntos de color rojo los diferentes puntos de control que intervendrán en el ajuste proyectivo. En color amarillo se dibuja la posición inicial aproximada de los puntos de control encontrados tras la primera iteración; en azul los resultados de la segunda iteración y, en morado los de la tercera iteración que denotan la clara convergencia del sistema.

Por otro lado, si considerásemos los parámetros de orientación interna obtenidos por calibración como valores aproximados con posibilidad de presentar algunos errores, el ajuste a realizar pasará a tener tres nuevas incógnitas, en total 9 parámetros a corregir.

El proceso de cálculo terminará tras un mayor número de iteraciones ya que las sucesivas correcciones son más pequeñas (p-valores elevados lo que indica que seran poco significativas), y el resultado del ajuste presentará los parámetros siguientes y un error minimo cuadrático final de 12.335 píxeles aproximadamente:

X0 = 3.4721 cm	L1= 56.9528
Y0 = -22.2912 cm	L2= 3.0646
Z0 = 28.3690 cm	L3= -0.9276
ω1= 0.5053rad	L4= -103.1186
φ1= 0.0138rad	L5= -1.7394
κ1= 0.0524rad	L6= 43.4808
	L7= 39.1796
	L8= -136.2096
	L9= -0.001
	L10= 0.0135
	L11= -0.0245

En las siguientes capturas se muestran por orden las cuatro primeras iteraciones (que son las más significativas ya que en la cuarta el resultado converge) y, la última captura muestra el resultado final:

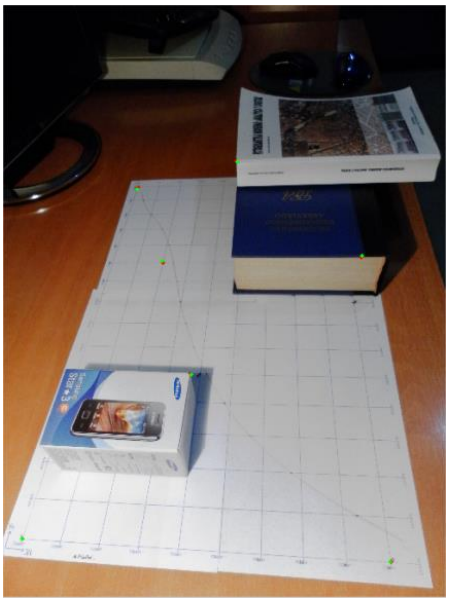
1ª iteración

2ª iteración

3ª iteración

4ª iteración

Resultado



Acorde con los resultados obtenidos de los ajustes (estimador, residuos…), el obtenido por colinealidad iterando con los 9 parámetros, ha sido aparentemente el mejor.

Los resultados mostrados anteriormente también se pueden analizar de forma numérica. En función de los parámetros de orientación externa e interna obtenidos en cada caso según la metodología elegida, las coordenadas pixel de los puntos de control bien obtenidas por las ecuaciones TLD o bien por colinealidad (paso de X, Y, Z terreno a x, y imagen) son las que se muestran en la tabla siguiente:

Coordenadas pixel de los Puntos de Control

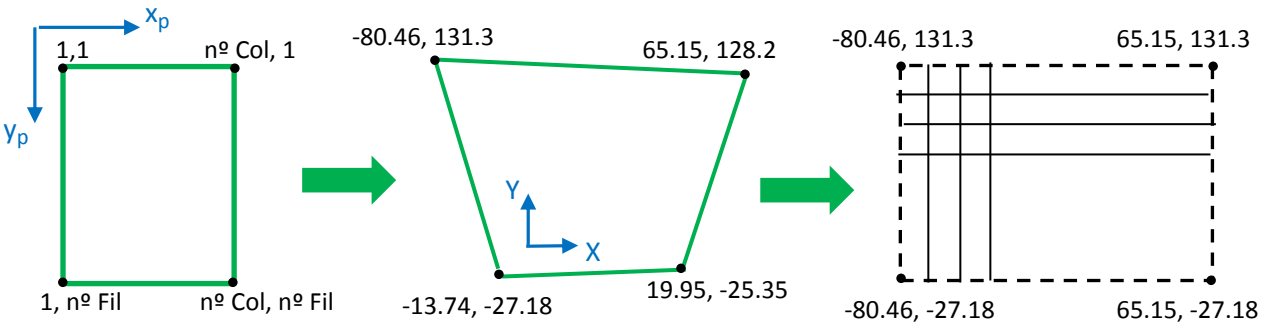
Punto	Coord. Medidas		Coordenadas Calculadas							
			Con parámetros TLD directa o OE aprox. y, OI de calibración				Con parámetros OE refinados (ajuste iterativo)			
							Col. 6 param		Col. 9 param	
	xp	yp	TLD		Colinealidad		TLD=Colinealidad		TLD=Colinealidad	
			xp	yp	xp	yp	xp	yp	xp	yp
1	129.5	3608.5	130.305	3610.702	-706.960	3529.549	133.167	3607.042	128.320	3610.743
2	915.5	1232.5	913.578	1233.768	406.954	164.828	910.534	1215.902	912.016	1242.066
3	1581.5	1052.5	1578.820	1053.886	1353.011	-121.761	1585.584	1100.621	1588.154	1060.999
4	2427.5	1706.5	2431.515	1706.512	2565.650	745.773	2430.650	1680.130	2433.385	1692.113
5	2631.5	3764.5	2626.837	3766.029	2843.424	3615.080	2632.886	3772.180	2623.091	3764.688
6	1269.5	2492.5	1270.049	2489.179	913.899	1901.340	1263.670	2489.625	1275.664	2497.614
7	1083.5	1742.5	1086.902	1739.669	653.442	863.037	1079.745	1730.340	1077.870	1731.277

En la tabla se comprueba que con los once parámetros TLD obtenidos de la aplicación directa, el resultado para las coordenadas pixel de los puntos de control obtenidos a partir de las coordendas terreno, es correcto. Sin embargo, la transformación de parámetros TLD a parámetros de orientación externa debe presentar problemas numéricos ya que para convertir del espacio objeto al espacio imagen con los seis parámetros de orientación externa aproximados, el resultado no es aceptable. Se requiere además realizar el proceso iterativo para refinar estos parámetros (X0,Y0,Z0,ω,φ,κ) y obtener así un resultado correcto.

A lo largo de todo este primer proceso metodológico se han conseguido obtener los parámetros de orientación interna y externa de la cámara en el momento en que se realizó la fotografía. Ahora ya se puede seguir con el proceso proyectivo de la imagen sobre un plano georreferenciado.

El primer paso consistirá en detectar cuáles son los límites en coordenadas terreno de la imagen. Para ello el programa generado establecerá una relación entre las coordenadas del espacio imagen al espacio terreno para poder proyectar bien las esquinas de la imagen o los valores extremos de una selección realizada por el usuario. En el ejemplo que se muestra a continuación, como se trata de un espacio terreno pequeño (las coordenadas mostradas estan en centímetros), se proyectaran las esquinas de la imagen correspondiente a la fotografia del escritorio.

Como los límites terreno no formaran un rectángulo, elegiremos las dos coordenadas mínima y máxima tanto de la coordenada X como de la Y y generaremos así una cuadrícula perfecta en coordenadas terreno con el tamaño de pixel deseado por el usuario:



Una vez generada esta cuadrícula georreferenciada, se trabajará sobre ella pero nuevamente en las coordenadas pixel de la misma. Siguiendo con el ejemplo y suponiendo un tamaño de pixel de 0.5cm, sabemos que la cuadrícula estará formada por un total de 292

píxeles (65.15-(-80.46))/tam.pixel) en las columnas (eje X), y 317 (131.3-(-27.18))/tam.pixel) píxeles en las filas (eje Y), según las dimensiones de la imagen proyectada de salida.

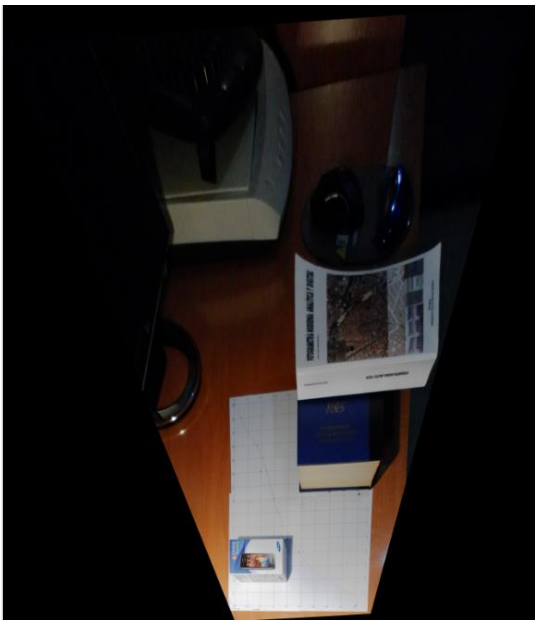
El programa creado preguntará al usuario sobre que cota del plano se quiere proyectar y se podrá elegir entre un plano de cota cero, una cota media establecida en el caso de disponer de datos GPS sobre la línea de costa, proyectar sobre un MDT, o sobre un valor determinado introducido por el mismo usuario.

En el ejemplo que nos concierne proyectaremos sobre el plano de cota cero que para nuestro sistema de coordenadas local se corresponde con el plano de la mesa del escritorio . Por tanto todo lo que esté a diferente altura, se proyectará con un error de desplazamiento relacionado con ésta.

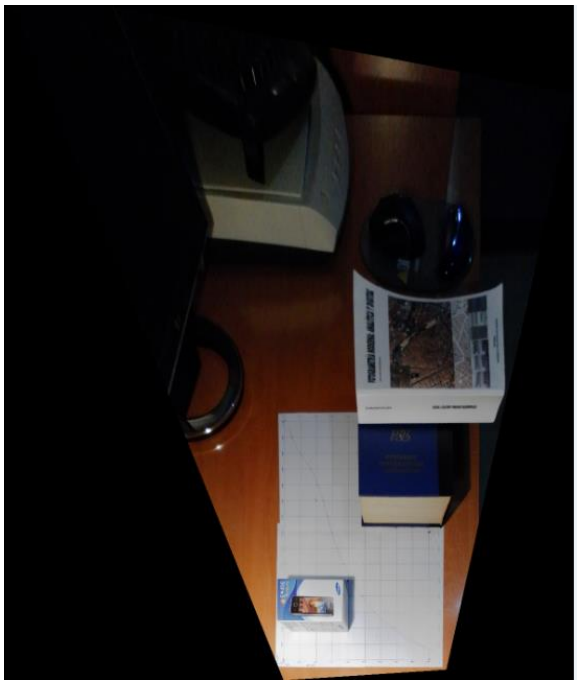
Una vez más se podrá escoger una determinada metodología para efectuar la proyección, bien según las ecuaciones de la TLD o bien por colinealidad, obteniendo el mismo resultado por ambos métodos. De este modo se establece nuevamente el vínculo entre espacio imagen y espacio objeto buscando así para cada pixel de la malla terreno las coordenadas fiduciales que le corresponden. Seguidamente habrá que buscar en la fotografía de entrada en perspectiva dicho pixel y guardar su radiometría original para incorporárla en nuestra malla terreno o imagen de salida. Esta metodología de búsqueda se llevará a cabo mediante el método del vecino más próximo o bien mediante interpolación cúbica.

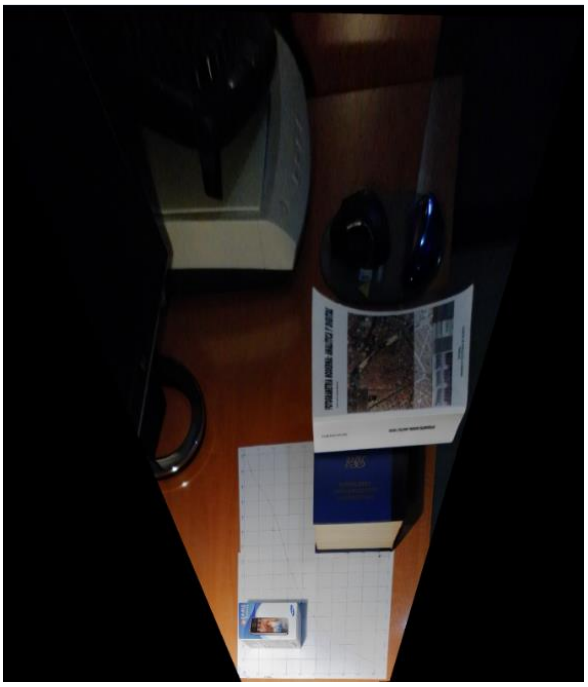
Seleccionando el ajuste radiométrico por el vecino más próximo, que será el método más rápido y el que menos modificará la radiometria original, los diferentes resultados obtenidos, según nos parámetros de orientación externa utilizados, se muestran a continuación.

La siguiente imagen proyectada se corresponde a la obtenida cuando no se ha realizado un previo refinamiento de los parámetros de orientación externa, es decir, se ha proyectado usando directamente los parámetros obtenidos de la TLD directa. Efectivamente se observa cómo el resultado no es aceptable ya que por ejemplo la hoja cuadriculada de la mesa no es rectangular.



Sin embargo, para los siguientes resultados sí se han utilizado los parámetros de orientación externa refinados por colinealidad. Para la obtención de la imagen izquierda, los parámetros de orientación han sido calculados dejando los de orientación interna fijos (colinealidad de 6 parámetros), mientras que la imagen derecha se ha obtenido tras el ajuste de colinealidad con los 9 parámetros libres:





En los resultados obtenidos claramente se observa que la imagen proyectada de la izquierda (obtenida por ajuste iterativo por colinealidad de 6 parámetros) es el mejor resultado pese a que según los estimadores del ajuste, era mejor el sistema de colinealidad con 9 parámetros. En la imagen de la izquierda se observa cómo los lados que forman el rectángulo de la hoja de cuadrícula se han proyectado de forma paralela y no queda

deformado, mientras que en la imagen derecha se aprecia una falta de paralelismo evidente. Esto nos indica que los parámetros de orientación interna obtenidos directamente de la calibración de la cámara ya eran lo suficientemente precisos como para trabajar con ellos en la proyección sin necesidad de refinarlos.

La imagen resultante se almacenará de forma georreferenciada en formato Geotiff. Presentará coordenadas proyectadas UTM en el sistema de referencia ETRS89 y referentes al uso 30 norte y al elipsoide GRS80. No obstante, cuando los escenarios son sintéticos como el ejemplo mostrado, las coordenadas seran referentes al sistema terreno local establecido por nosotros mismos.

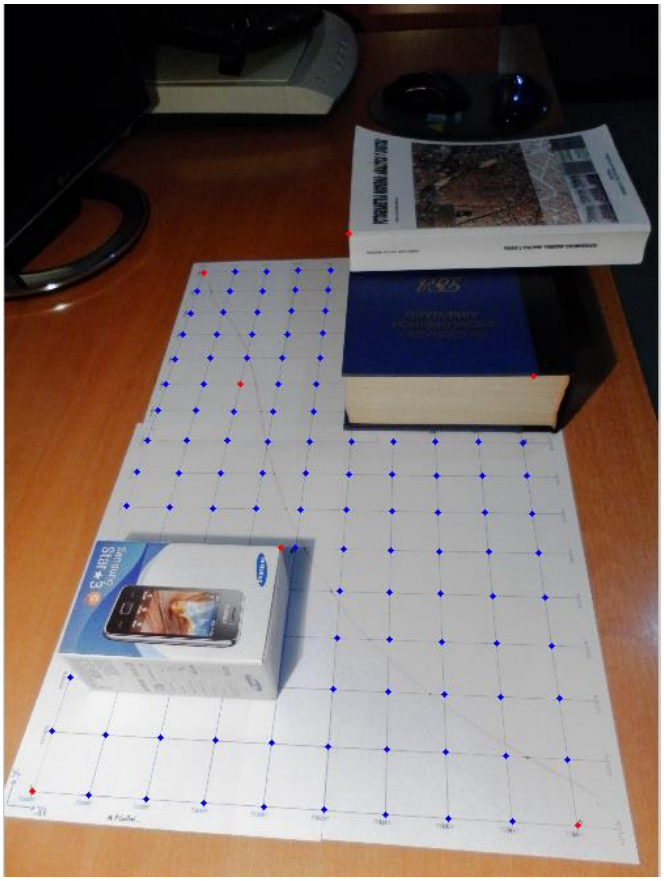
Una vez realizada la proyección será necesario testear los resultados obtenidos mediante un análisis de errores.

Dicho estudio, como ya se ha adelantado anteriormente, sólo podrá testearse sobre los puntos del plano de proyección. Por tanto para el ejemplo del escritorio, utilizaremos la cuadrícula situada en el plano de la mesa (plano proyectivo) para analizar la diferencia entre las coordenadas proyectadas de las esquinas que forman la cuadrícula frente a las coordenadas terreno de la misma.

En primer lugar crearemos un fichero que contenga las coordenadas imagen (clicadas sobre la fotografía y con origen del sistema de coordenadas en esquina superior izquierda de la imagen) y terreno reales de todos los cuadrados que forman la hoja de cuadrícula (coordenadas referidas al sistema objeto local), un total de 107 puntos:

Pto	xim	yim	Xt (cm)	Yt (cm)	Zt (cm)
1	129.5	3608.5	0	0	0
2	389	3627	3.33	0	0
3	651	3644	6.67	0	0
4	918	3661	10	0	0
5	1189	3679	13.33	0	0
6	1468	3695	16.67	0	0
7	1749	3714	20	0	0
8	2036	3732	23.33	0	0
9	2331	3749	26.67	0	0
10	2630	3767	30	0	0
11	221	3335	0	3.32	0
….					
103	913	1231	0	49.8	0
104	1058	1227	3.33	49.8	0
105	1203	1226	6.67	49.8	0
106	1350	1221	10	49.8	0
107	1499	1218	13.33	49.8	0

Estos puntos se muestran en la imagen con puntos azules mientras que en color rojo se presentan los puntos de control que han intervenido en el proceso proyectivo:

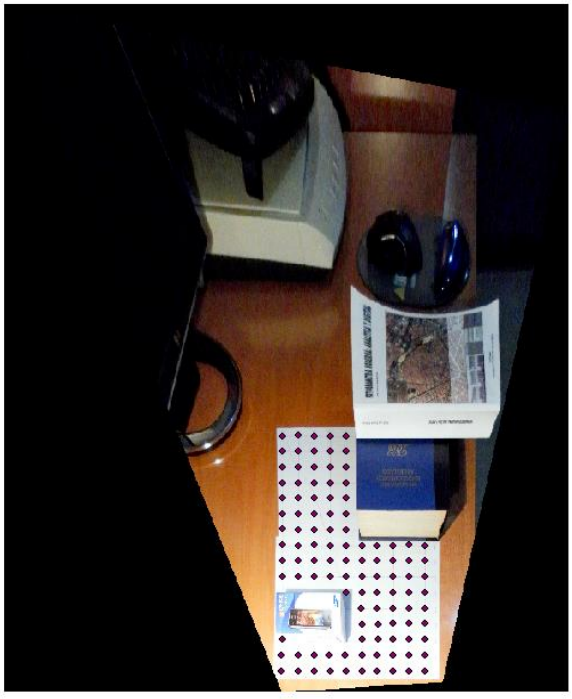


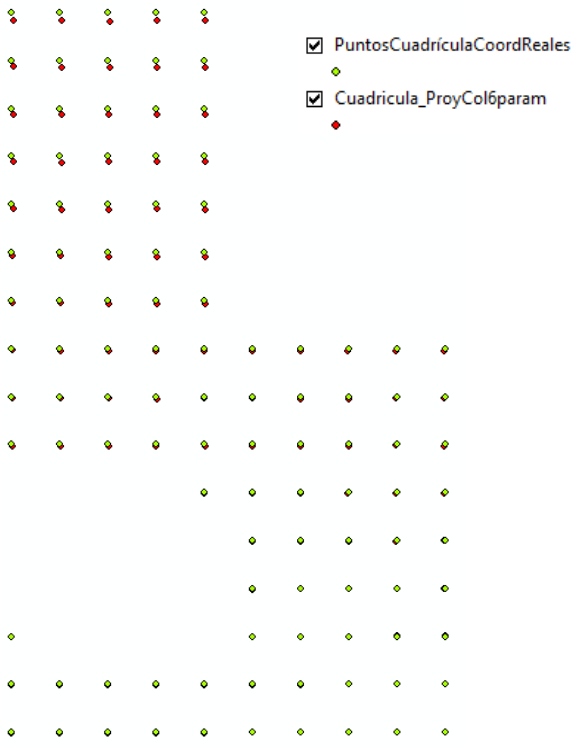
A continuación se mostraran estos mismos puntos azules pero los resultantes de la proyección de éstos sobre el plano Z=0.

Las coordenadas terreno proyectadas se almacenan en un fichero de texto que abriéndolo por ejemplo con el software ArcGis como una tabla de eventos, así como la imagen georreferenciada, podremos comprobar cómo efectivamente coinciden y dibujan exactamente la cuadrícula proyectada. La tabla siguiente muestra las coordenadas resultantes de la proyección dependiendo de cúal ha sido el proceso metodológico seguido en la obtención de los parámetros de orientación interna y externa de la toma fotográfica.

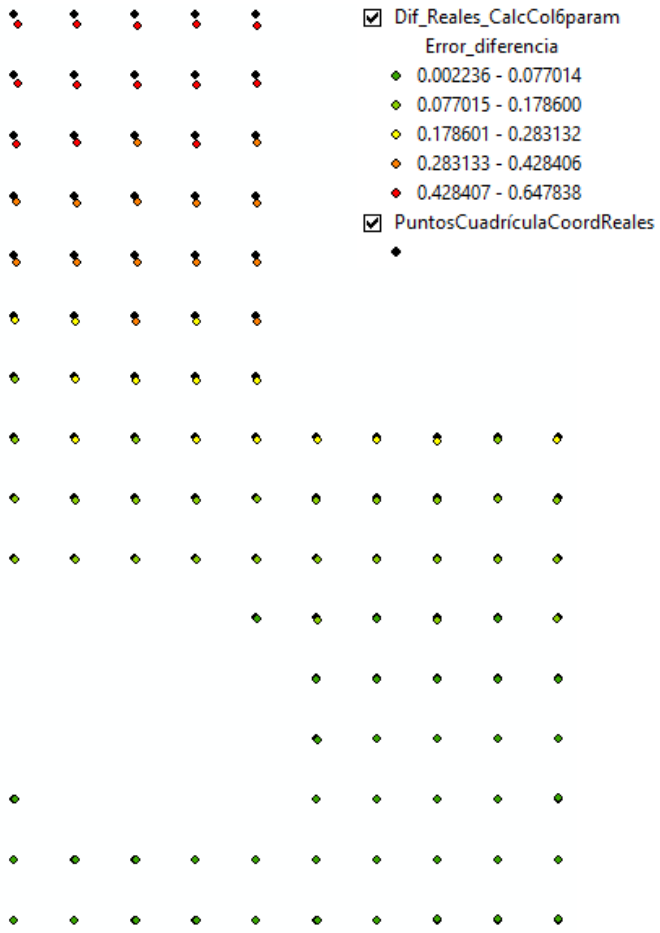
Pto	Coordenadas terreno reales (cm)		Coordenadas terreno proyectadas (cm)					
			Colinealidad 6 param		Colinealidad 9 param		TLD	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	0	0	-0.041	-0.019	0.005	0.024	-0.012	0.015
2	3.33	0	3.338	-0.034	3.267	-0.002	3.187	-0.01
3	6.67	0	6.678	-0.03	6.519	-0.01	6.392	-0.018
4	10	0	10.015	-0.023	9.8	-0.016	9.637	-0.022
5	13.33	0	13.338	-0.024	13.097	-0.029	12.913	-0.035
6	16.67	0	16.689	0.002	16.453	-0.016	16.262	-0.02
7	20	0	20.001	-0.002	19.8	-0.033	19.617	-0.037
8	23.33	0	23.316	0.008	23.183	-0.036	23.022	-0.038
9	26.67	0	26.657	0.034	26.624	-0.024	26.502	-0.024
10	30	0	29.976	0.051	30.075	-0.019	30.008	-0.018
11	0	3.32	-0.008	3.286	0.019	3.133	0.004	3.175
….								
103	0	49.8	0.171	49.225	-0.065	50.257	-0.033	49.947
104	3.33	49.8	3.492	49.251	3.431	50.522	3.316	50.316
105	6.67	49.8	6.795	49.165	6.942	50.663	6.694	50.567
106	10	49.8	10.088	49.226	10.477	50.971	10.11	50.982
107	13.33	49.8	13.399	49.212	14.068	51.197	13.594	51.321

Empezaremos por analizar también visualmente la proyección realizada según el método de colinealidad por 6 parámetros mediante los ficheros *shapefile* de puntos generados a partir del archivo con las coordenadas terreno reales y el otro con las coordenadas terreno proyectadas. De este modo se pueden analizar los errores obtenidos en la proyección de cada punto:



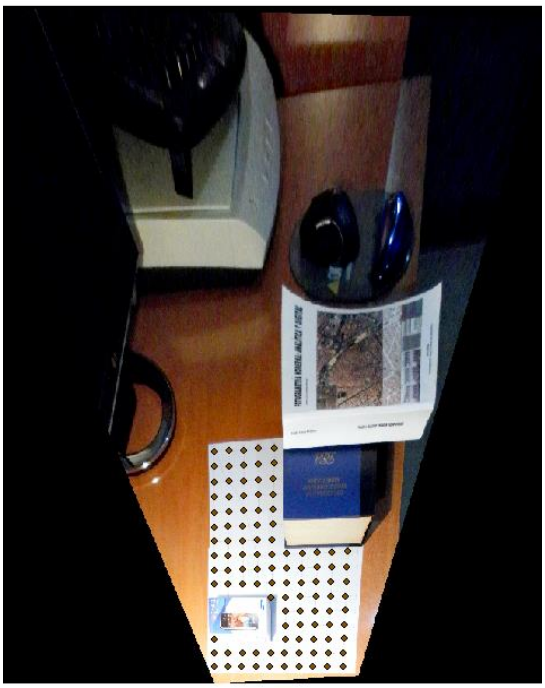


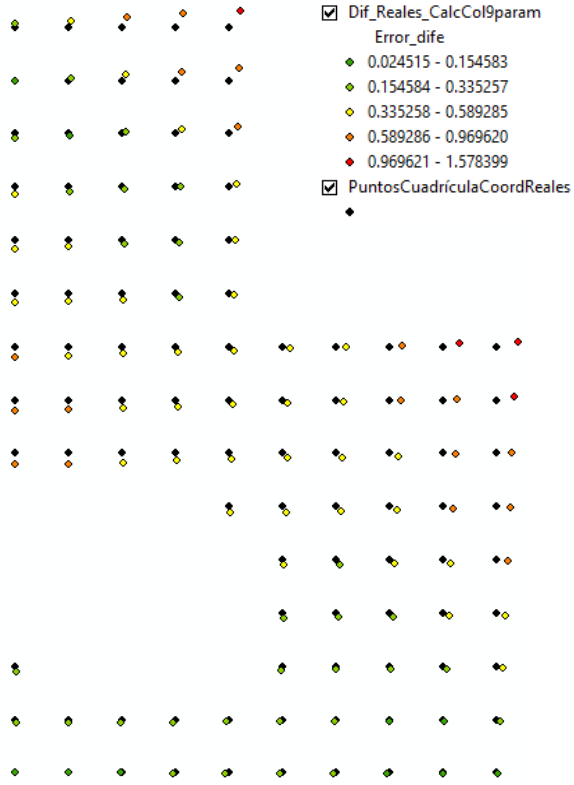
Así mismo, se podrá obtener unas cantidades numéricas de dichos errores calculando la distancia euclidea entre la posición de un punto según sus coordenadas reales y las proyectadas. Nuevamente la representación de los puntos que forman la cuadrícula reales y proyectados, coloreados en función de la diferencia entre ambos es la siguiente:



Se comprueba que el máximo error se da en la parte superior de la imagen que coincide con la parte más lejana a la posición de la cámara en el momento de la toma. No obstante el máximo error no supera los 0.65cm.

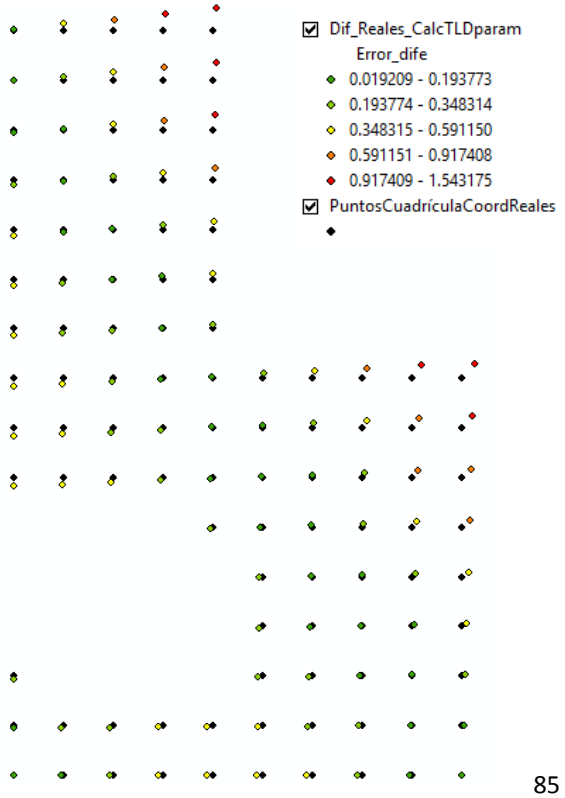
Para el caso de la proyección con los parámetros obtenidos por colinealidad de 9 parámetros se realiza el mismo estudio. En primer lugar se muestran los puntos que forman la cuadrícula proyectada (imagen izquierda), así como las diferencias entre la cuadrícula generada con las coordenadas reales y la generada con las proyectadas (imagen derecha):





En este caso se aprecia que los errores mayores se dan en la parte superior-derecha de la cuadrícula, con un error máximo de 1.6cm. Se observa que este resultado es peor al anterior, probablemente debido a que los parámetros de orientación interna se estan falseando en el ajuste actual ya que los obtenidos por calibración eran lo suficientemente estables como para utilizarlos directamente.

Por último, utilizando los parámetros de orientación externa obtenidos directamente de la TLD, el resultado es el siguiente:

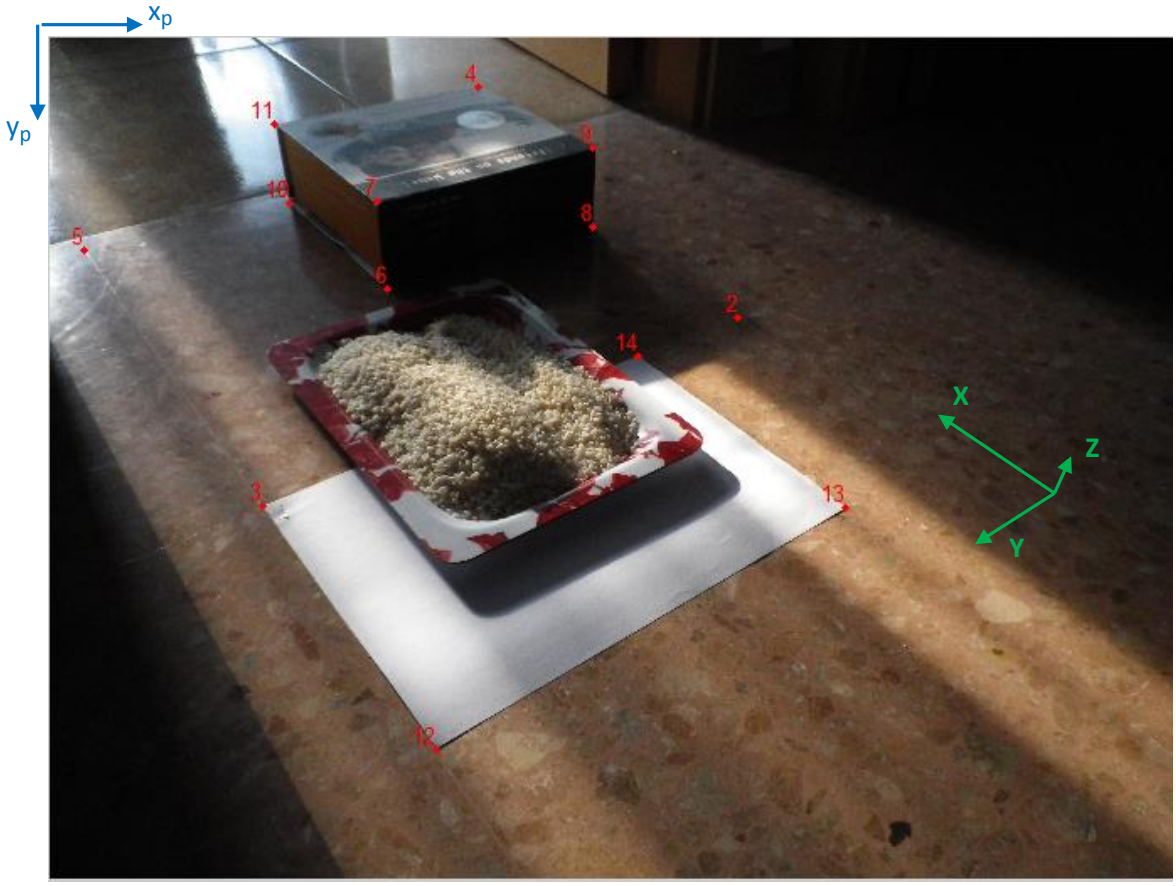


En este último caso se aprecia una distribución y magnitud del error similar al caso anterior. El máximo error alcanza los 1.54cm pero en cualquier el resultado no es correcto y nos demuestra la necesidad de iterar con seis parámetros.

4.2.2. Segundo escenario

En este apartado repetiremos el proceso metodológico realizado esta vez para un nuevo escenario. El vínculo entre el espacio terreno 3D (X,Y,Z) y el espacio imagen 2D (xp,yp), se realizará con 13 puntos de apoyo mediante la TLD directa..

El nuevo escenario es el siguiente:



Y las coordenadas de los puntos de control con los que se realizará la transformación son:

Punto	xp (columnas)	yp (filas)	X (cm)	Y (cm)	Z (cm)
2	2450	1002	40	0	0
3	756	1674	40	40	0
4	1529	176	80	0	7.5
5	124	760	80	40	0
6	1202	896	59.8	20.4	0
7	1166	586	59.8	20.4	7.5
8	1934	673	59.8	0	0
9	1937	395	59.8	0	7.5
10	852	591	80	20.4	0
11	803	311	80	20.4	7.5
12	1376	2540	19	40	0
13	2837	1678	19	10.3	0
14	2096	1136	40	10.3	0

El sistema mínimo cuadrático generado en este ejemplo es: $A_{(26,\,11)} * x_{(11,\,1)} = K_{(26,\,1)} + R_{(26,\,1)}$, y la solución obtenida de los parámetros TLD es:

$$x_{(11,\,1)} = \begin{bmatrix} -26.6297 \\ -34.3648 \\ 4.1771 \\ -551.4997 \\ 22.4460 \\ -15.4187 \\ 29.1295 \\ 566.5501 \\ 0.0078 \\ -0.0059 \\ -0.0119 \end{bmatrix}$$

Los residuos obtenidos en el ajuste son los que se muestran a continuación:

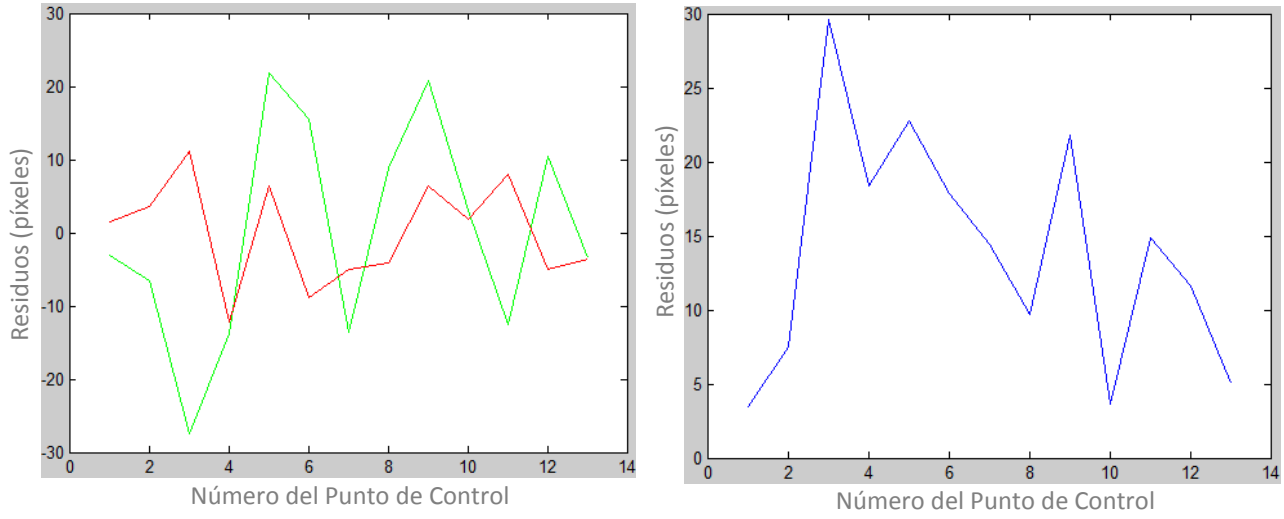


Figura 21: El gráfico de la izquierda muestra en color verde los residuos en la coordenada x (columnas) de los puntos de control, mientras que el color rojo representa los residuos en la coordenada y (filas). El gráfico de la derecha muestra el residuo total de cada punto de control.

Se aprecia qué en general los residuos son excesivamente grandes y esto puede deberse a la imprecisión excesiva en el posicionamiento sobre la imagen de los puntos de control (error en las coordenadas imagen). En este caso el punto con mayor error será el punto 3 con unos residuos de entre 10 y 25 píxeles.

Por último el estimador de la variable de peso unidad será el que nos permita finalmente seguir con el proceso o rechazar el ajuste. Para el ejemplo mostrado se obtiene un error mínimo cuadrático de 14.82 píxeles lo cual nos haría rechazar el ajuste y empezar de nuevo procurando que no existan errores groseros y siendo más cuidadosos en la selección de las coordenadas.

El siguiente paso será obtener los parámetros de orientación externa aproximados directamente de la transformación TLD. La posición de la cámara y su orientación, así como los factores de escala “h” y el de falta de perpendicularidad “d” de los ejes coordenados:

X0 = -52.0114 cm
Y0 = 28.6035 cm
Z0 = 35.7687 cm

ω1= 0.6879rad	ω2= 3.8295 rad
φ1= -0.0319 rad	φ2= 3.1735 rad
κ1= 4.105 rad	κ2= 0.9643 rad

h= 0.9081
d= 0.0185

A continuación, y una vez recreado el momento de la toma de la imagen, habrá que mejorar los parámetros obtenidos de orientación externa según el método iterativo de colinealidad.

El sistema mínimo cuadrático que a continuación se muestra es el generado a partir del proceso iterativo de colinealidad con seis parámetros. Los correspondientes a la orientación interna (x0,y0,focal) se mantendran fijos porque son los que proceden de la calibración de la cámara (esta fotografía se realizó con la cámara PENTAX Optio H90).

Los resultados que se muestran en los pasos siguientes se corresponden primero con una resolución del sistema minimo cuadrático por Gauss-Newton, en segundo lugar se muestra la resolución por el método de Levenberg-Marquardt sin escalado y por último con escalado.

El proceso de cálculo terminará con 9 iteraciones resolviendo por cualquiera de los tres desarrollos anteriormente citados y, la desviación del estimador de peso unidad a posteriori es de 14.241 píxeles.

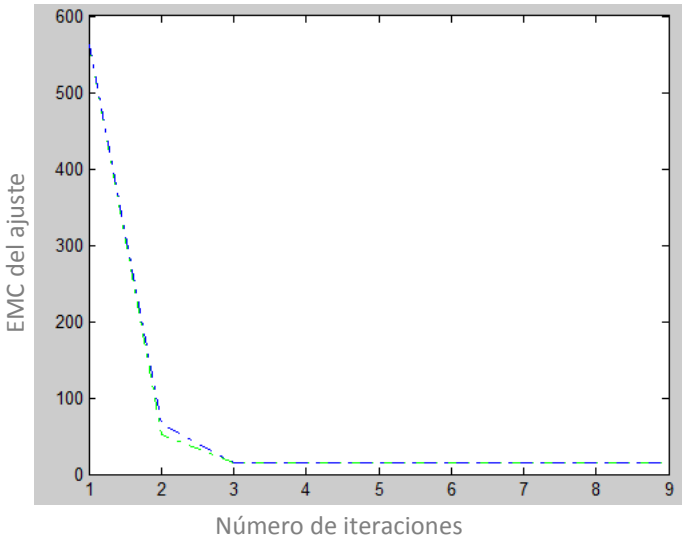


Figura 22: El gráfico muestra en color rojo se representa cómo ha sido la resolución del sistema por Gauss-Newton, en verde por Levenberg-Marquardt sin escalado y en azul con escalado (que en este caso se solapan en gran medida).

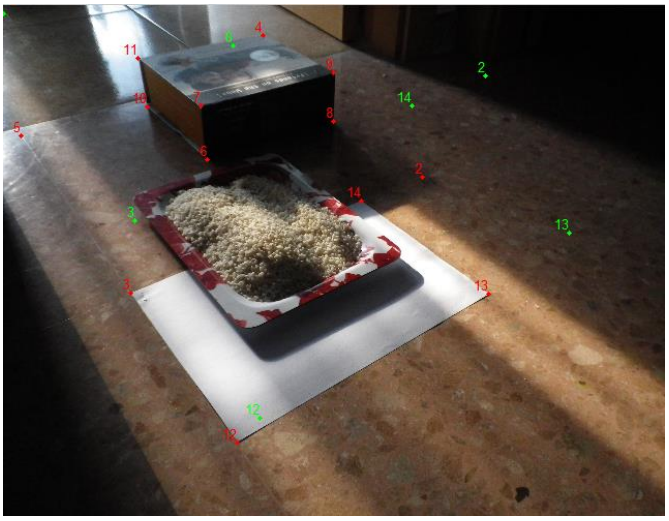
Independientemente de la fórmula de resolución, los parámetros de orientación externa obtenidos y sus correspondientes parámetros TLD son:

X0 = -61.2372 cm	L1= -26.5496
Y0 = 33.6295 cm	L2= -34.0700
Z0 = 39.8281 cm	L3= 1.6484
ω1= 0.8861 rad	L4= -545.7233
φ1= -0.0382 rad	L5= 22.3435
κ1= 4.0503 rad	L6= -15.7926
	L7= 33.4623
	L8= 566.6100
	L9= 076
	L10= -063
	L11= -081

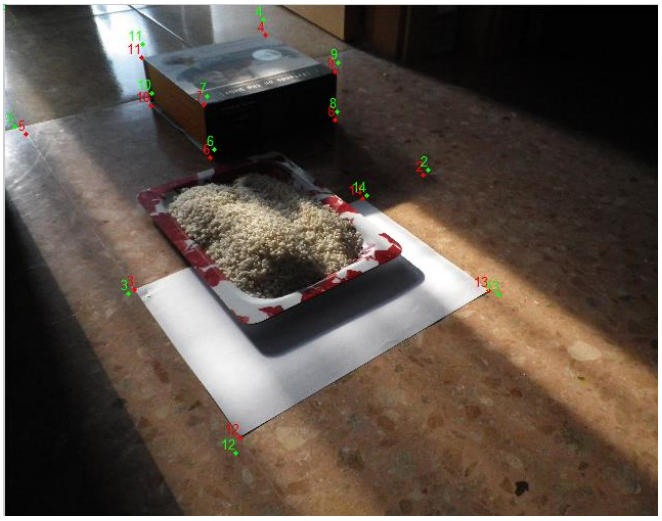
Se observa cómo los p-valores de los diferenciales (matriz de parámetros x) poco a poco van aproximándose a la unidad, indicando así que las correcciones a realizar en los parámetros de OE introducidos incialmente son necesarias pero tras cada iteración van perdiendo significancia ya que efectivamente los parámetros de orientación externa se van corrigiendo satisfactoriamente.

En las siguientes capturas se muestran por orden sólo las tres primeras iteraciones, ya que en la tercera el resultado converge y el resultado ya es muy similar al resultado final:

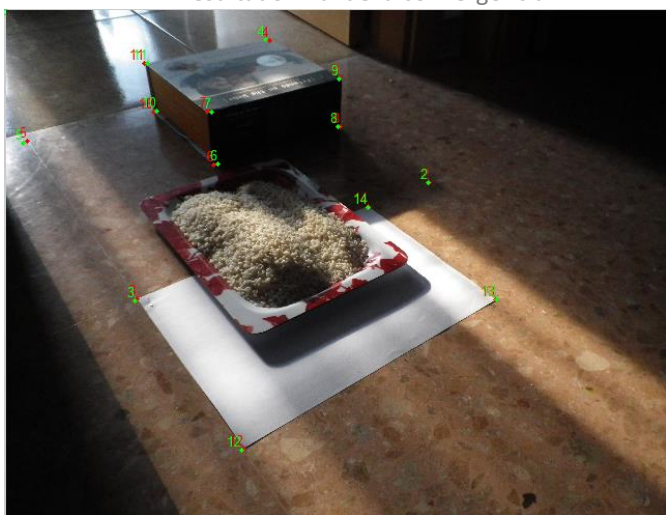
1ª iteración



2ª iteración



Resultado final de la convergencia



Por otro lado, si considerásemos los parámetros de orientación interna obtenidos por calibración como valores aproximados con posibilidad de presentar algunos errores, el ajuste a realizar pasará a tener tres nuevas incógnitas, en total 9 parámetros a corregir.

El proceso de cálculo terminará tras un mayor número de iteraciones ya que las sucesivas correcciones son más pequeñas (p-valores elevados lo que indica que seran poco

significativas), y el resultado del ajuste presentará los parámetros siguientes y un error minimo cuadrático final de 14.5 píxeles aproximadamente:

X0 = -60.569 cm
Y0 = 33.349 cm
Z0 = 38.892 cm
ω1= 0.852 rad
φ1= -0.0255 rad
κ1= 4.0728 rad

L1= -26.6444
L2= -34.1930
L3= 1.9560
L4= -549.6006
L5= 22.4027
L6= -15.5903
L7= 33.7520
L8= 564.1548
L9= 077
L10= -060
L11= -085

Los resultados mostrados anteriormente también se pueden analizar de forma numérica. En función de los parámetros de orientación externa e interna obtenidos en cada caso según la metodología elegida, las coordenadas pixel de los puntos de control bien obtenidas por las ecuaciones TLD o bien por colinealidad (paso de X, Y, Z terreno a x, y imagen) son las que se muestran en la tabla siguiente. Se mostrarán unicamente los resultados obtenidos con el refinamiento de los seis parámetros de colinealidad ya que es el ajuste más coherente y el que se utilizará en los siguientes apartados.

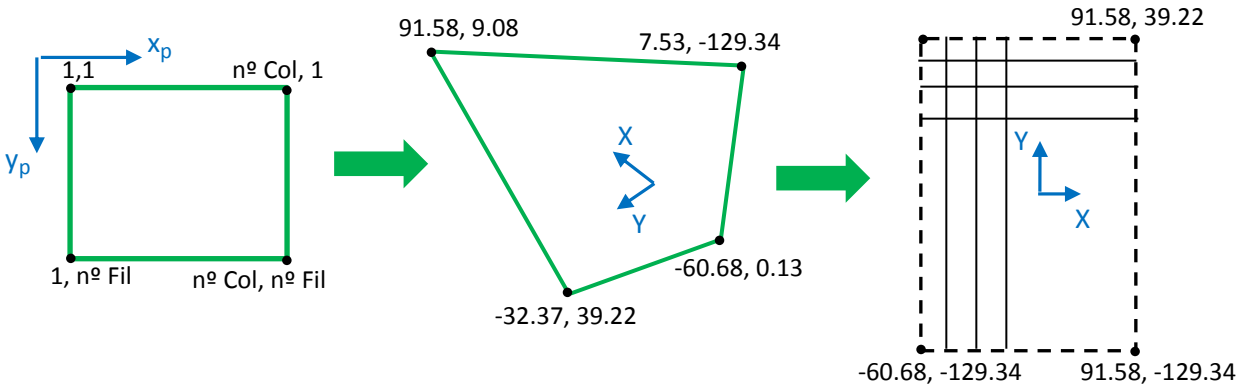
Coordenadas pixel de los Puntos de Control

Punto	Coord. Medidas		Coordenadas Calculadas					
			Con parámetros TLD directa o OE aprox. y, OI de calibración				Con parámetros OE refinados (ajuste iterativo)	
							Col. 6 param	
	xp	yp	TLD		Colinealidad		TLD=Colinealidad	
			xp	yp	xp	yp	xp	yp
2	2450	1002	2446.454	1000.697	2780.085	428.25	2446.103	976.101
3	756	1674	748.315	1670.761	761.006	1263.032	802.541	1583.959
4	1529	176	1506.524	166.584	1662.513	-682.166	1404.681	184.377
5	124	760	108.75	771.353	0.566	74.416	333.086	765.779
6	1202	896	1224.66	890.049	1327.377	255.349	1183.199	859.411
7	1166	586	1183.049	595.901	1277.902	-129.473	1133.116	621.607
…								
14	2096	1136	2092.69	1140.287	2359.462	602.155	2037.215	1127.325

En la tabla se comprueba que con los once parámetros TLD obtenidos de la aplicación directa el resultado para las coordenadas pixel de los puntos de control obtenido a partir de las coordendas terreno, es correcto. Sin embargo, la transformación de parámetros TLD a parámetros de orientación externa es poco precisa ya que con éstos el resultado de coordenadas pixel no es aceptable y sería necesario realizar el proceso iterativo para refinar estos parámetros (X0,Y0,Z0,ω,φ,κ) y obtener así un resultado correcto.

Una vez se tienen los parámetros de orientación interna y externa de la cámara en el momento en que se realizó la fotografía, se seguirá con el proceso proyectivo de la imagen sobre un plano georreferenciado.

El primer paso consistirá en detectar cuáles son los límites en coordenadas terreno de la imagen, convirtiendo de coordenadas en el espacio imagen al espacio terreno. Como los límites terreno no formaran un rectángulo, elegiremos las dos coordenadas mínima y máxima tanto de la coordenada X como de la Y y generaremos a -60.68, 39.22 a perfecta en coordenadas terreno con el tamaño de pixel deseado por el usuario.



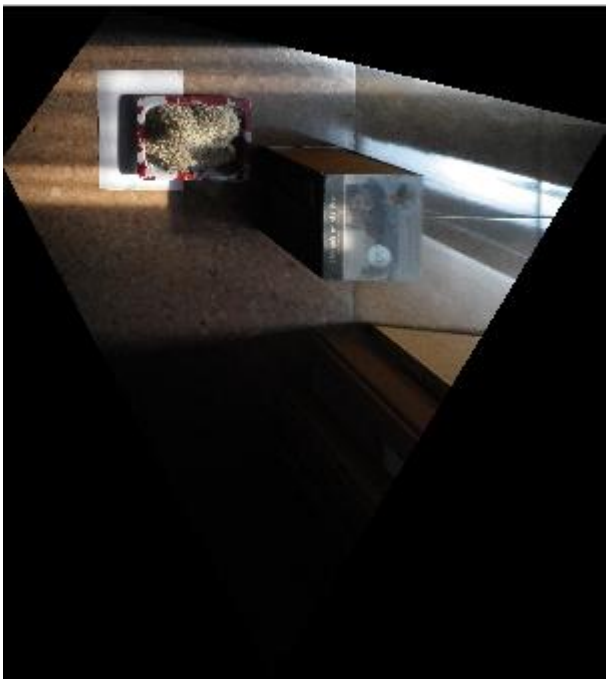
Una vez generada esta cuadrícula georreferenciada, se trabajará sobre ella pero nuevamente en las coordenadas pixel de la misma. Siguiendo con el ejemplo y suponiendo un tamaño de pixel de 0.05 cm, sabemos que la cuadrícula estará formada por un total de 3046 píxeles (91.58-(-60.68))/tam.pixel) en las columnas (eje X), y 3372 (39.22-(-129.34))/tam.pixel) píxeles en las filas (eje Y), según las dimensiones de la imagen proyectada de salida.

En el ejemplo que nos concierne proyectaremos sobre el plano de cota cero que para nuestro sistema de coordenadas local se corresponde con el plano del suelo. Por tanto todo lo que esté a diferente altura, se proyectará con un error de desplazamiento relacionado con ésta bien mediante las ecuaciones TLD o bien por colinealidad.

A continuación, se establece nuevamente el vínculo entre espacio imagen y espacio objeto buscando así para cada pixel de la malla terreno las coordenadas fiduciales que le corresponden. Habrá que buscar en la fotografía de entrada en perspectiva dicho pixel y

guardar su radiometría original para incorporarla en nuestra malla terreno o imagen de salida. Esta metodología de búsqueda se puede llevar a cabo mediante el método del vecino más próximo o bien según interpolación cúbica. De igual forma esto será decisión del usuario.

Seleccionando el ajuste radiométrico por el vecino más próximo y, proyectando por colinealidad a partir de los parámetros de orientación externa obtenidos tras el proceso de colinealidad iterativa de 6 parámetros y los de orientación interna propios de la calibración de la cámara, el resultado es el siguiente:



Aparentemente este resultado es correcto ya que los lados que forman el rectángulo de la hoja de papel se han proyectado de forma paralela y sin deformar. Además, como la imagen resultante está georreferenciada en coordenadas terreno podemos medir cualquier objeto que se sitúe sobre el plano de proyección y comprobar si las distancias son correctas respecto a las reales.

Por ejemplo, en el suelo de la habitación se encuentra una hoja de papel de tamaño A4 que sabemos deberia de medir 21x29.7 cm. Abriendo la imagen geotiff resultado de la proyección por ejemplo con el software Envi y midiendo ambos lados de la hoja de papel tenemos que, el ancho de la hoja mide 421.0107 pixels que como se proyectó a 0.05 cm/pixel se corresponde con 21,05 cm y, por otro lado, el largo de la hoja mide 593.102 pixels que equivalen a 29.655cm. De este modo se ha comprobado que para este caso concreto la imprecisión de los objetos existentes en la imagen proyectada respecto a su posición real sería de aproximadamente 0.05cm.

Para el desarrollo de esta herramienta de proyección se han realizado pruebas con otros escenarios como los que se muestran en el Anejo 4.

4.3. Casos reales

Una vez realizada la herramienta de proyección y, contrastada en escenarios de diversa índole, se probó sobre el caso concreto de una fotografía del litoral que consiste en el objeto de estudio de este proyecto.

Los pasos metodológicos a seguir seran muy similares a los realizados en los casos sintéticos pero incorporando algunas mejoras que se requeriran por tratarse principalmente de un espacio de mayores dimensiones.

Como ya se adelantó en apartados anteriores, las fotografias de la zona del litoral a analizar se realizaran desde una contrucción elevada que existe en este lugar y nos permitirá por tanto obtener un mayor alcance visual de la línea de costa.

Se pretenderá realizar un seguimiento de la línea de costa a lo largo de la mayor extensión posible y por ello se dividirá la zona en dos sectores: la zona norte y la zona sur. En ambos casos las fotografías se deberan realizar lo más estáticas posible y que en ellas quede contenida toda la zona donde se ubicaran los puntos de control así como la línea de horizonte.

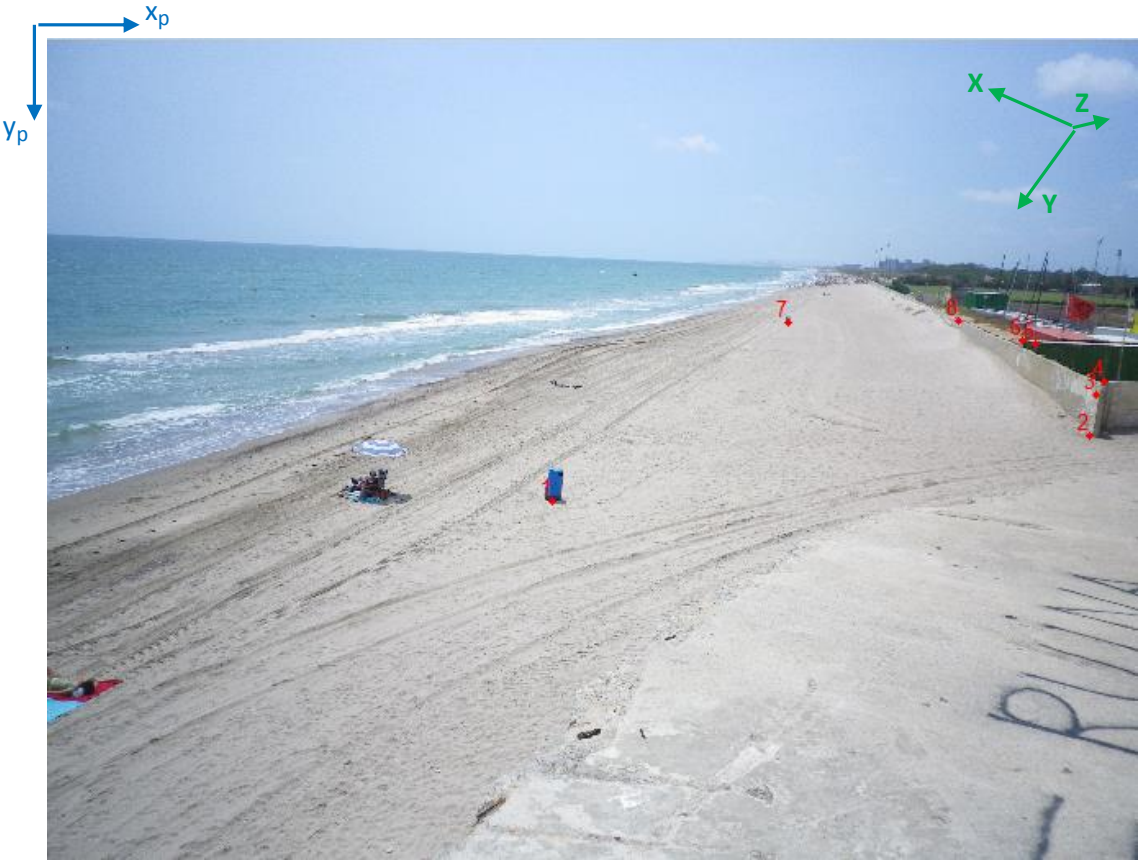
Las fotografías con las que trabajaremos han sido previamente corregidas de las posibles deformaciones de la cámara con que fueron tomadas tal y como se explicó en apartados anteriores y con la herramienta "*Camera Calibration Toolbox*" de Matlab.

4.3.1. Zona Sur

En primer lugar, para establecer el vínculo entre el espacio terreno 3D (X, Y, Z) y el espacio imagen 2D (xp, yp), como para esta zona disponemos de 8 puntos de control tomados por GPS el mismo día que se tomó la fotografía, procederemos resolviendo la resección espacial según la TLD directa que requería de seis puntos de control.

En primer lugar se crea un fichero para cada escenario que contenga las coordenadas imagen (píxel) y terreno de los puntos de control que intervendrán en la proyección. El programa leerá del fichero GPS las coordenadas terreno y permitirá situar cada punto en la imagen en perspectiva así como definir un determinado peso para cada observable.

A continuación se muestra la imagen de la zona sureña:



Punto	xp (columnas)	yp (filas)	X (cm)	Y (cm)	Z (cm)	σ	Pesos ($P = \frac{1}{\sigma^2}$)
1	1856.5	1689.5	730196	4363618.22	0.793	10	0.01
2	3826.5	1451.5	730182.478	4363597.44	1.659	3	0.1111
3	3849.5	1301.5	730182.445	4363597.39	3.462	5	0.04
4	3879.5	1251.5	730182.012	4363595.82	3.898	8	0.0156
5	3625.5	1111.5	730186.4	4363581.02	4.454	8	0.0156
6	3575.5	1100.5	730187.354	4363578.82	4.397	5	0.04
7	2718.5	1035.5	730220.781	4363522.96	0.789	2	0.25
8	3344.5	1027.5	730196.275	4363546.95	3.878	5	0.04

Tabla 2: Coordenadas imagen y terreno de los puntos de apoyo, así como su valor de "σ" asociado que indica la incertidumbre en el posicionamiento de cada punto.

Dependiendo de la precisión con que haya podido ser detectado se le asignará un error o desviación estándar para ponderarlos. Conforme nos alejemos en la fotografía de la posición de toma, el tamaño del pixel se hará cada vez más grande y por tanto un error de un único pixel en el punto 7 será bastante más significativo que el mismo error en el punto 1; el peso del observable 7 para el ajuste debería ser mayor (luego menor desviación) que el del punto 1. Tendremos por tanto una ponderación heterocedástica; los puntos de control no tendrán significados de varianza iguales y esto se muestra claramente en las siguientes capturas.

En la figura 23, la localización exacta de los puntos de control número 1 (en papelera cercana, a 20 m) y número 7 (en papelera alejada unos 120 m), se correspondería con el centro de la base de las papeleras respectivas. Sin embargo, se observa que la base de la papelera cercana está formada por un número de píxeles muy superior al de la papelera lejana y, consecuentemente, equivocarse en la posición del punto de control en un píxel será insignificante frente al mismo fallo en el punto 7.

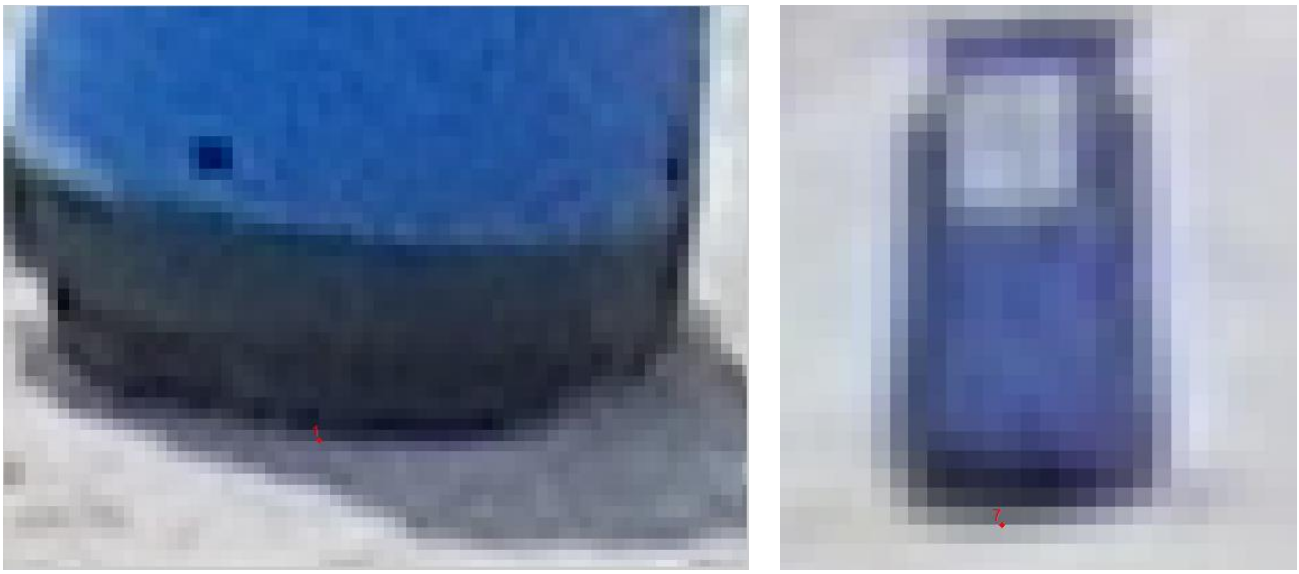


Figura 23: En las capturas se muestran dos de los puntos de control que intervendrán en el ajuste de la transformación. La imagen izquierda se corresponde con el punto de control más próximo a la posición de toma de la fotografía y donde se estima que la posición del punto es correcta con un posible error de ±10 píxeles. Sin embargo, la imagen derecha que se corresponde con el punto de control más lejano, se estima su posición con un error de ±2 píxeles.

A continuación se obtendrán los parámetros TLD (matriz x de incógnitas) mediante las fórmulas de resección espacial para una imagen fotográfica. Se ha de tener en cuenta que previamente hay que transformar las coordenadas pixel al sistema de coordenadas fiducial cuyo origen es el punto principal de la imagen:

$$x_f = xp - x_{PP}$$

$$\mathrm{y_f} = -(\mathrm{yp} - \mathrm{y_{PP}})$$

El sistema mínimo cuadrático del ajuste es Ax=K+R, siendo:

$A_{(16,\ 11)}=$

$$\begin{bmatrix}
4.28 & 38.39 & 0.79 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 610.17 & 5470.49 & 113.00 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4.28 & 38.39 & 0.79 & 1 & 815.70 & 7313.18 & 151.07 \\
-9.24 & 17.62 & 1.66 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16886.33 & -32197.58 & -3031.82 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -9.24 & 17.62 & 1.66 & 1 & 438.91 & -836.87 & -78.80 \\
-9.27 & 17.56 & 3.46 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17159.92 & -32499.17 & -6406.43 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -9.27 & 17.56 & 3.46 & 1 & 1831.44 & -3468.57 & -683.75 \\
-9.71 & 15.99 & 3.90 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18252.37 & -30071.78 & -7330.19 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -9.71 & 15.99 & 3.90 & 1 & 2402.27 & -3957.87 & -964.76 \\
-5.32 & 1.19 & 4.45 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8649.93 & -1939.40 & -7244.43 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5.32 & 1.19 & 4.45 & 1 & 2060.77 & -462.05 & -1725.93 \\
-4.36 & -1.01 & 4.40 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6880.04 & 1588.52 & -6931.87 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4.36 & -1.01 & 4.40 & 1 & 1739.10 & 401.54 & -1752.20 \\
29.06 & -56.87 & 0.79 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20910.74 & 40915.54 & -567.69 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 29.06 & -56.87 & 0.79 & 1 & -13470.64 & 26357.68 & -365.70 \\
4.56 & -32.88 & 3.88 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6131.28 & 44239.54 & -5217.85 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4.56 & -32.88 & 3.88 & 1 & -2148.57 & 15502.74 & -1828.48
\end{bmatrix}$$

$K_{(16,\ 1)} =$

$$\begin{bmatrix}
-142.50 \\ -190.50 \\ 1827.50 \\ 47.50 \\ 1850.50 \\ 197.50 \\ 1880.50 \\ 247.50 \\ 1626.50 \\ 387.50 \\ 1576.50 \\ 398.50 \\ 719.50 \\ 463.50 \\ 1345.50 \\ 471.50
\end{bmatrix}$$

$r_{(16,\ 1)} =$

$$\begin{bmatrix}
0.39 \\ -1.46 \\ 0.27 \\ 0.09 \\ -4.17 \\ 0.49 \\ 7.87 \\ -2.66 \\ -0.78 \\ 2.50 \\ 0.86 \\ 0.48 \\ 0.01 \\ 0.06 \\ -0.33 \\ -1.16
\end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_{(11,\ 1)} \pm \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}\ (11,\ 1)} =$

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{-53.60 \pm 2.64} \\ \mathbf{-29.21 \pm 0.28} \\ \mathbf{-19.91 \pm 31.09} \\ \mathbf{1303.19 \pm 30.97} \\ \mathbf{7.50 \pm 0.69} \\ \mathbf{-8.37 \pm 0.47} \\ \mathbf{54.44 \pm 4.48} \\ \mathbf{159.06 \pm 7.84} \\ \mathbf{0.00 \pm 0} \\ \mathbf{-0.01 \pm 0} \\ \mathbf{-0.01 \pm 0.02}
\end{bmatrix}$$

Representamos los residuos visualmente:

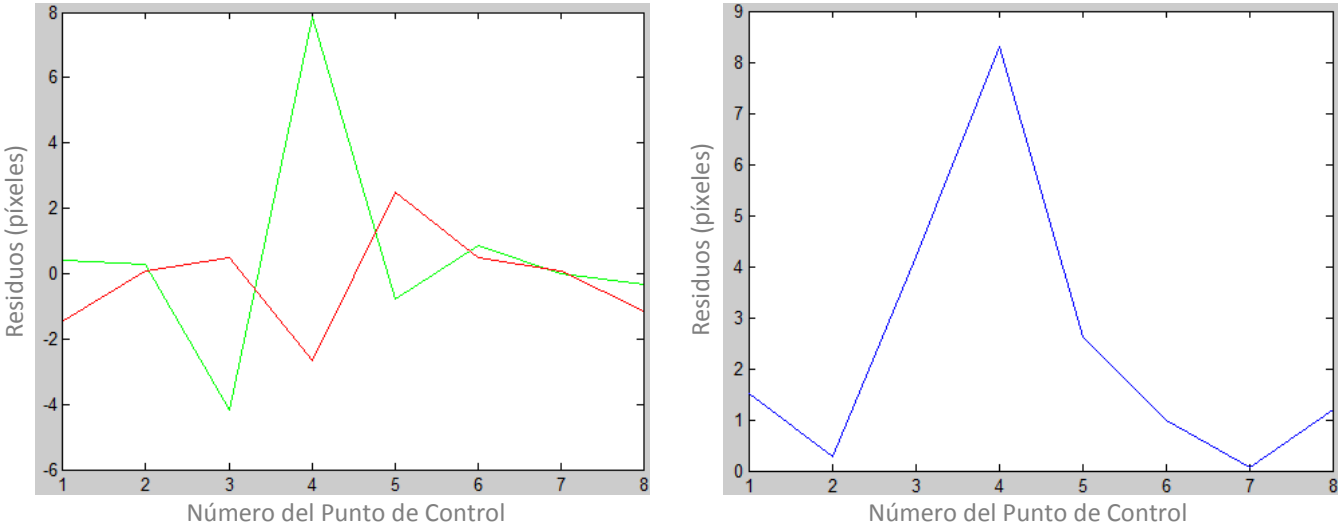


Figura 24: El gráfico de la izquierda muestra en color verde los residuos en la coordenada x (columnas) de los ocho puntos de control que intervienen en el ajuste, mientras que el color rojo representa los residuos en la coordenada y (filas). De forma complementaria, el gráfico de la derecha muestra el residuo total de cada punto de control.

De este modo podemos apreciar qué puntos son los que más incomodan al ajuste. En este caso el punto con mayor error será el punto 4 con unos residuos de entre 2 y 8 píxeles. Si analizamos qué posible problema sería el que está afectando a este punto, comprobamos que efectivamente se trata de un punto que se tomó en la esquina superior-izquierda de un pilar de la pared, pero que sin embargo, en la fotografía no se puede detectar con precisión su posición y de aquí este posible error grosero.

En cuanto al estimador de la variable de peso unidad que será el que nos permita finalmente seguir con el proceso o rechazar el ajuste, se obtiene un error mínimo cuadrático de 0.636. Sabemos que en la hipótesis a priori éste se había estimado como la unidad, pero para ser una primera aproximación de los parámetros TLD, es decir, de la relación entre espacio terreno e imagen, se acepta la validez del ajuste. Sin realizar un ajuste ponderado, el estimador a posteriori sería de 4.436 píxeles, que igualmente nos verifica que el ajuste es correcto.

El siguiente paso será obtener los parámetros de orientación externa aproximados directamente de la transformación TLD. La posición de la cámara y su orientación (las dos ternas de ángulos posibles), así como los factores de escala “h” y el de falta de perpendicularidad “d” de los ejes coordenados:

X0 = 730181.14528 m
Y0 = 4363638.6697 m
Z0 = 7.5827 m
ω1= 0.83836 rad ω2= 3.9799 rad
φ1= 0.07048 rad φ2= 3.0711 rad

κ1= 3.3498 rad κ2= 0.208 rad
h= 0.7799
d= -0.1578

Antes de continuar se puede analizar cómo ha ido esta primera aproximación ya que aunque se ha supuesto que no se conocía la posición de la cámara, ésta fue tomada con el GPS y por tanto se puede contrastar:

	Coordenadas GPS (m)	Coordenadas aprox. (m)	Diferencia (m)
X0	730181.542	730181.145	-0.3967
Y0	4363641.19	4363638.669	-2.5203
Z0	7.905	7.583	-0.3223

Se observa que la coordenada peor estimada a priori ha sido la del eje Y con un error de 2.5m. No obstante en cómputo general la aproximación de la posición de la toma ha sido buena.

A continuación, y una vez recreado el momento de la toma de la imagen, habrá que mejorar los parámetros obtenidos de orientación externa según el método iterativo de colinealidad. En este caso se mostrarán los resultados obtenidos a partir del proceso iterativo de colinealidad con seis parámetros, manteniendo fijos los parámetros de orientación interna (x0 ,y0 ,focal) que proceden de la calibración de la cámara PENTAX Optio H90 y que recordemos que eran los siguiente valores referentes al sistema de coordenadas fiducial x0= 0.5, y0=-0.5, focal= -3385.725.

Además, el programa preguntará al usuario si la imagen presenta línea de horizonte ya que en ese caso, se añadiran a las ecuaciones correspondientes propias del ajuste por colinealidad, dos nuevas asociadas a la geometría de la línea de horizonte. De este modo se podrá constreñir ésta y usarla como si se dispusiera de puntos de control en el infinito.

Por último la herramienta permitirá considerar el error de esfericidad terrestre para la ecuación que define la línea de horizonte según el ángulo tilt. El usuario decidirá si quiere considerarlo o no y dependiendo de la opción seleccionada entrará en el sistema una fórmula u otra:

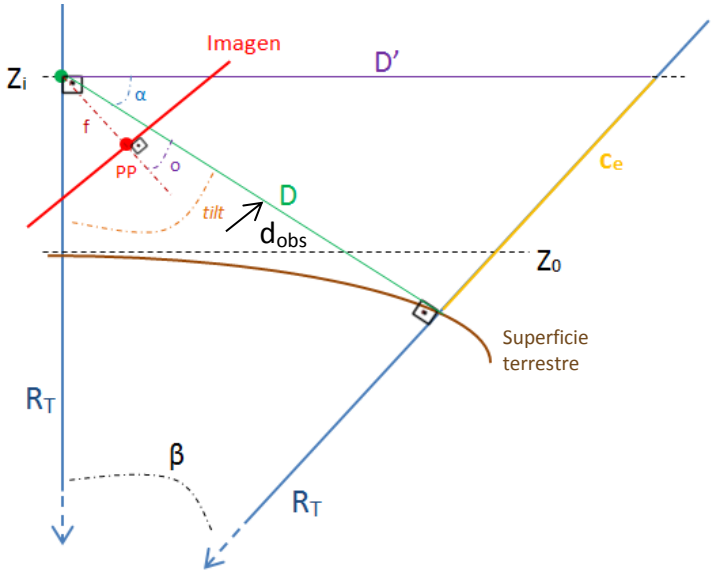
$$\mathrm{F_t} \equiv \mathrm{acos}(cos\varphi\ cos\omega) - \mathrm{atan}\left(-\frac{f-\left(\frac{d_{obs}\ ce}{D}\right)}{d_{obs}+\left(\frac{f\ ce}{D}\right)}\right) = 0 \qquad \textit{Con corrección de esfericidad}$$

$$\mathrm{F_t} \equiv \mathrm{acos}(cos\varphi\ cos\omega) - atan\frac{-f}{d_{obs}} = 0 \qquad \textit{Sin corrección de esfericidad}$$

Para el cálculo del error de esfericidad se introducirá la altura respecto al nivel del mar desde donde se tomó la fotografía incorporando la altura del trípode, esto es en total un valor de 7.905 m. Por tanto la distancia "D" a la que se encuentra la línea de horizonte respecto a un observador a esta altura es de 10.036 km, según formulación expuesta en este proyecto. No obstante esta medida está afectada por la esfericidad terrestre y por tanto en realidad estará más lejos.

Se obtiene la distancia c_e que es la que separa la posición de la línea de horizonte afectada de esfericidad y la línea de horizonte que debería verse en la imagen sin quedar afectada por la esfericidad terrestre según la fórmula:

$$ce = \sqrt{\left(\frac{D\,(R_T+Z_i)}{R_T}\right)^2 - D^2} = 15.81\,m$$



La última medida que necesitamos para formular la ecuación de la línea de horizonte según el ángulo tilt corregido de esfericidad terrestre, es la distancia observada entre el punto principal y la línea de fuga u horizonte en el espacio imagen. Calculando esta distancia (d_{obs}) con dos puntos localizados en el horizonte obtenemos un valor de 697.9113 píxeles.

La línea de horizonte dibujada en la imagen con los dos puntos de fuga seleccionados es la siguiente:

Una vez generadas todas las ecuaciones de colinealidad, dos por cada punto de control, se añadirán las dos asociadas a la línea de horizonte tal y como se detalló en el apartado de metodología, contando estas dos últimas con peso infinito (se establece un valor de $P=\frac{1}{0.00001^2}$) y por tanto con mucha significancia en el ajuste. Se convierten en dos constreñimientos y, el sistema presenta un total de 18 ecuaciones y seis incógnitas, correspondientes a los parámetros de orientación externa.

Con los parámetros aproximados iniciales en la primera iteración no consigue encontrar ni los puntos de control ni la línea de horizonte. Sin embargo en la segunda iteración ya los empieza a ubicar y el resultado es el que se muestra en la figura 25A. Tras cada iteración se observa que el sistema va convergiendo en la solución correcta consiguiendo finalmente el resultado que se muestra en la figura 25B.

Figura 25: En ambas fotografías se dibuja con una línea azul la línea de horizonte observada y en rojo la posición exacta de los siete puntos de control que intervienen en el ajuste. Sin embargo, se dibujan también los resultados obtenidos tras la segunda iteración (imagen A) y tras finalizar el ajuste (imagen B); en color verde se muestra la posición de los puntos de apoyo y, con una línea de trazo discontinuo, la línea de horizonte calculada.

Los resultados del ajuste se muestran en el anejo 4 donde en primer lugar se expone el cálculo según la resolución del sistema minimo cuadrático por Gauss-Newton, en segundo lugar se muestra la resolución por el método de Levenberg-Marquardt sin escalado y por último con escalado. En todos los casos se consigue el mismo resultado con un total de nueve

iteraciones y un error mínimo cuadrático adimensional de 1.739 según el ajuste ponderado, y de 8.784 píxeles para el ajuste sin ponderación.

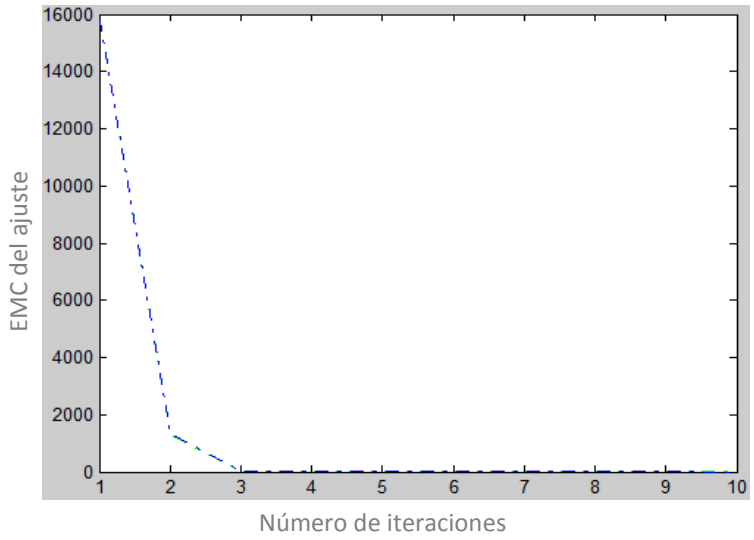


Figura 26: El gráfico muestra: en color rojo la resolución del sistema por Gauss-Newton, en verde por Levenberg-Marquardt sin escalado y, en azul, con escalado. Los tres comportamientos son muy similares y prácticamente no se distinguen en la imagen.

Independientemente de la fórmula de resolución, los parámetros de orientación externa obtenidos y sus correspondientes parámetros TLD son:

X0 = 730181.398398 m
Y0 = 4363641.214944 m
Z0 = 7.99088 m
ω1= 1.36889 rad
φ1= -0.04364 rad
κ1= 3.67377 rad

L1=-49.60766
L2=-29.22075
L3= 2.512267
L4= 1261.8292
L5= 7.98211
L6= -8.70157
L7= 56.406139
L8= 165.82194
L9= 0.00833
L10= -0.0144
L11= -0.00341

En los resultados del ajuste y, tras cada iteración, se observa cómo los p-valores de los diferenciales (matriz de parámetros x) poco a poco van aproximándose a la unidad, indicando así que las correcciones a realizar en los parámetros de OE introducidos son necesarias; principalmente en los ángulos omega y phi cuyos p-valores iniciales son 0.005 y 0.56 respectivamente. Sin embargo, tras cada iteración van perdiendo significancia ya que efectivamente los parámetros de orientación externa se van corrigiendo satisfactoriamente (ver resultados del ajuste en Anejo 3).

A continuación se muentran las coordenadas de la cámara calculadas tras el ajuste frente a las exactas medidas en campo con GPS. De este modo se puede observar el grado de acierto conseguido para estos tres parámetros de orientación externa:

	Coordenadas GPS (m)	Coordenadas calculadas (m)	Diferencia (m)
X0	730181.542	730181.3984	0.1436
Y0	4363641.19	4363641.215	-0.025
Z0	7.905	7.9909	-0.0859

Por otro lado, si analizamos los residuos del ajuste obtenidos para la última iteración, se observa que el punto de control que más problemas está aportando al ajuste es el punto 4. Efectivamente se trata de un punto que visualmente en la imagen ya se vio que no habia podido ser identificado con exactitud y no se descarta la posibilidad de un error grosero. Sin embargo, el punto 9 que hace referencia al constreñimiento de la línea de horizonte, se ha ajustado perfectamente tal y como era de esperar debido a su elevado peso asociado.

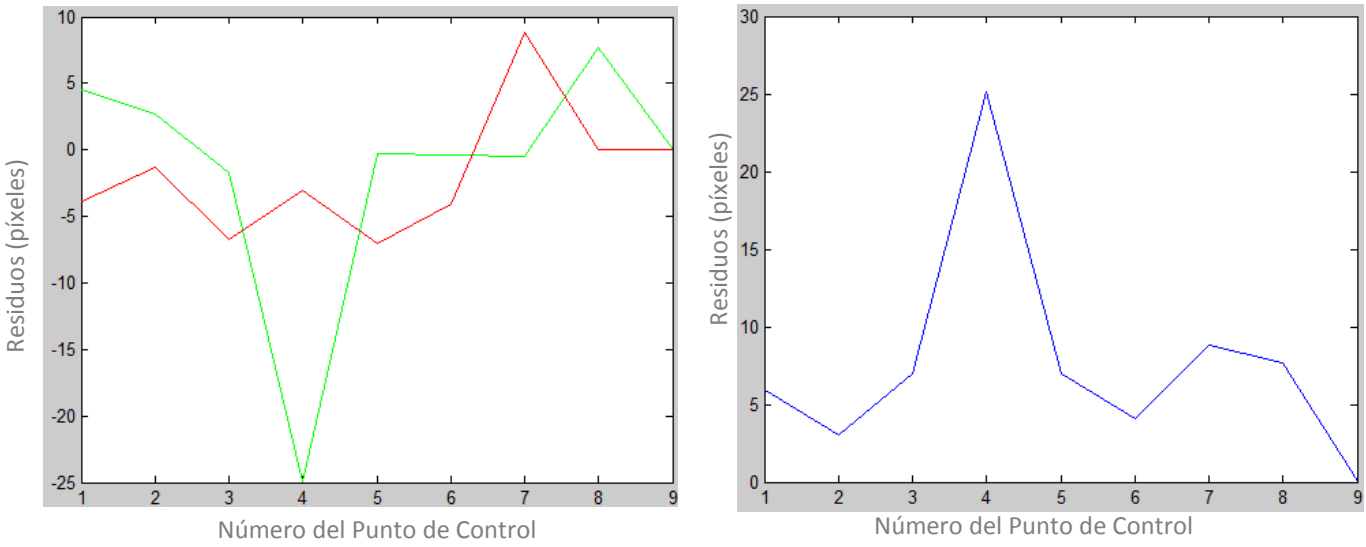


Figura 27: En los siguientes gráficos se representa en el eje de abscisas los ocho puntos de control más el constreñimiento de la línea de horizonte y, en el de ordenadas las cantidades en píxeles. El gráfico de la izquierda muestra en color verde los residuos en la coordenada x (columnas) de los puntos de control que intervienen en el ajuste, mientras que el color rojo representa los residuos en la coordenada y (filas). De forma complementaria, el gráfico de la derecha muestra el residuo total de cada punto de control.

Una vez obtenidos los parámetros de orientación interna y externa de la cámara en el momento en que se realizó la fotografía, seguiremos con el proceso proyectivo de la imagen sobre un plano georreferenciado.

Como la zona fotografiada es una zona muy extensa, el programa no sería capaz de procesar toda su extensión para proyectarla. Además, sólo seria capaz de trabajar con puntos

de la imagen localizados por debajo del horizonte que es donde se dispone de la información de interés. Por todo ello, el usuario deberá de seleccionar el área que desea proyectar en la imagen. Como en este proyecto la obtención de la posición de la línea de costa es lo que centra todo nuestro interés, el área a proyectar será la siguiente:

Estos límites son los que se proyectan del espacio imagen al espacio terreno siendo las coordenadas terreno las que se resumen en la siguiente tabla:

Punto	X	Y
a	730231.3119	4363614.5223
b	730295.7814	4363347.5158
c	730230.2568	4363481.3566
d	730196.3516	4363615.8571
e	730191.9884	4363633.1654
f	730193.4171	4363634.1351

En total, las dimensiones terreno de la zona a proyectar van a ser de 103.793 m en la coordenada X y, 286.619 m para la coordenada Y. Sobre esta área de trabajo se generará una cuadrícula de coordenadas terreno con el tamaño de pixel introducido por el usuario.

Siguiendo con el ejemplo y para un tamaño de pixel de 10cm, sabemos que la cuadrícula estará formada por un total de 1038 píxeles en las columnas (eje X), y 2867 píxeles en las filas (eje Y), según las dimensiones de la imagen proyectada de salida.

Se eligirá proyectar sobre un MDT ya que se tiene del perfil de playa estudiado con una precisión de 5 cm para conseguir que tras la proyección no existan errores de desplazamiento por la diferencia de altura.

La proyección se podrá realizar mediante las ecuaciones TLD o con colinealidad, obteniendo el mismo resultado por ambos métodos. Así mismo, la radiometría de la imagen se generará siguiendo el método del vecino más próximo.

El resultado de la proyección se muestra en el siguiente mapa, representado en el sisteama de coordenadas UTM referidas al ETRS89 y para el huso 30 Norte:

Figura 28: En el mapa se muestra de fondo la ortofoto del PNOA y, superpuesta, la fotografía proyectada sobre el MDT de la playa de la zona Sur. Mediante puntos rojos se muestran los puntos de control utilizados, y con triángulos negros la línea de costa medida en campo con GPS.

Sin embargo, si proyectamos sobre un plano de cota cero, se observará que la zona próxima a la línea de costa (de altitud muy similar a este valor) no presentará cambios significativos, pero conforme aumentamos la cota a lo largo del perfil de playa, se manifiesta un desplazamiento considerable debido a esta diferencia de altura, y mayor será conforme nos alejemos de la posición de toma. Observar por ejemplo cómo los dos puntos de control de las papeleras que representan la posición exacta, se encuentran desplazados respecto a la base de la papelera dibujada en la imagen.

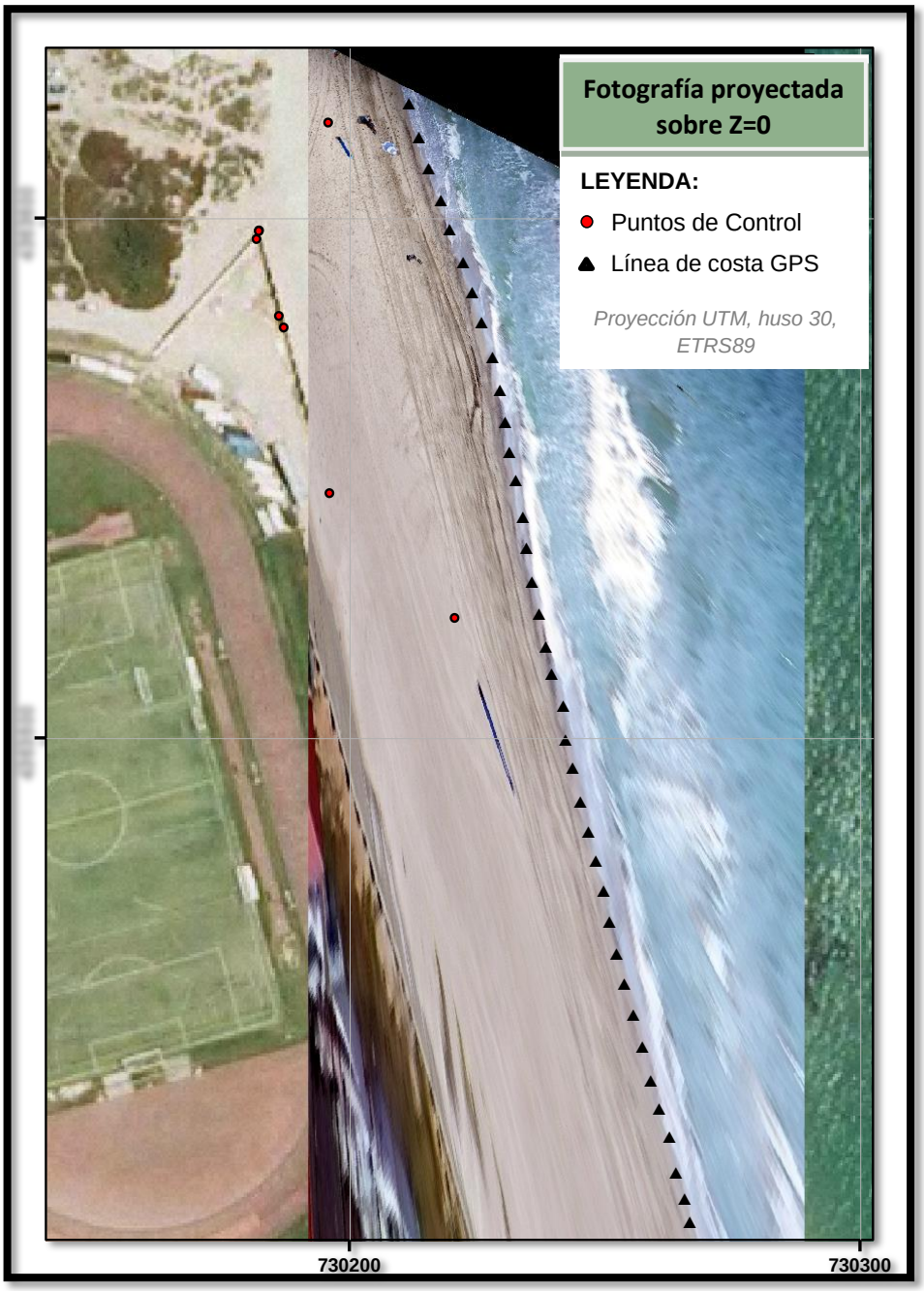


Figura 29: En el mapa se muestra de fondo la ortofoto del PNOA y, superpuesta, la fotografía de la playa de la zona Sur proyectada sobre un plano de Z=0. Mediante puntos rojos se muestran los puntos de control utilizados, y con triángulos negros la línea de costa medida en campo con GPS.

De igual forma, se puede proyectar sobre un valor promedio de altitud, obtenido de las mediciones GPS de la línea de costa medida. No obstante, el resultado será prácticamente igual al de la figura 29 ya que dicho valor promedio, para este sector concreto de playa, es de -0.02m.

También se puede trabajar con una imagen promediada, es decir, la imagen media de todas las fotografías instantáneas realizadas durante el lapso de tiempo en que pasó el satélite Landsat 8 (72 fotografías en un minuto de tiempo). Con ésta se facilitará la decisión a la hora de digitalizar la línea de costa ya que únicamente habrá que seguir la traza que dibuja el límite tierra-agua por haber sido obviadas las oscilaciones debidas al vaivén de las olas. Además morfológicamente esta línea cobra un mayor rigor por marcar las bandas arenosas que se forman en la interfaz tierra-mar (zonas de rompiente del oleaje).

Esta imagen media se obtuvo con un programa que promedia todas las imágenes y que ha sido creado también por el grupo CGAT de la UPV.

Como el número de puntos de control era suficiente, se probó a proyectar obviando la calibración de la cámara y por tanto sin disponer de unos parámetros de orientación interna aproximados a priori. De este modo, operando mediante TLD y posteriormente iterando por colinealidad con los 9 parámetros libres (3 de orientación interna y 6 de orientación externa), el sistema consigue igualmente converger correctamente, pese a necesitar un mayor número de iteraciones, tal y como se muestra en la siguiente figura:

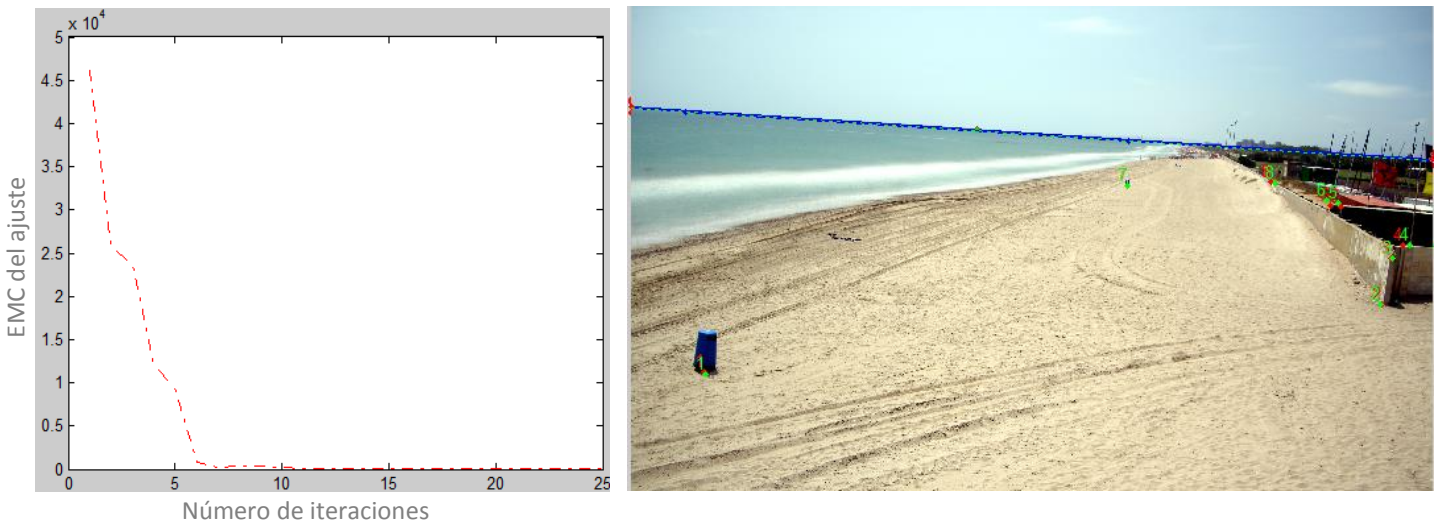


Figura 30: El gráfico de la izquierda representa, en color rojo, cómo ha sido la resolución del sistema por Gauss-Newton. La imagen de la derecha, es la fotografía promedio donde se muestra la convergencia del sistema: la línea azul y los puntos rojos muestran la línea de horizonte observada y la posición exacta de los puntos de control, mientras que la posición calculada de dichos puntos y, la línea de horizonte, se dibujan respectivamente en color verde y con una línea discontinua.

Sin embargo, si probamos a resolver el sistema de igual forma (iterando por colinealidad con los 9 parámetros libres) pero sin el constreñimiento de la línea de horizonte, se observa cómo el programa realizado no consigue converger en la posición correcta tal y como se observa en la siguiente captura donde la posición de los puntos de control se ha encontrado pero la línea de horizonte no se detecta correctamente. Esto se debe a que los

giros en los parámetros de orientación externa no se han podido estimar bien sólo con un ajuste donde intervengan los puntos de control.

Figura 31: La imagen es la fotografía promediada donde se muestra la mala convergencia del sistema por no considerar el constreñimiento de línea de horizonte. Se dibuja en rojo los siete puntos de control que intervienen en el ajuste mientras que la posición calculada de los puntos se dibuja en color verde y, con trazo discontinuo, la línea de horizonte resultado de los giros obtenidos en el ajuste sin haber considerado la restricción geométrica de ésta.

Numéricamente se observa también esta diferencia de forma muy significativa en los ángulos obtenidos dependiendo se considere o no el contreñimiento de la línea de horizonte en la resolución del sistema:

Parámetros de orientación externa calculados		
	***Con** constreñimiento línea horizonte*	***Sin** constreñimiento línea horizonte*
X0	730181.398398 m	730181.787806 m
Y0	4363641.214944 m	4363636.882668 m
Z0	7.99088 m	6.312630 m
ω1	1.36889 rad	2.088397 rad
φ1	-0.04364 rad	-0.146142 rad
κ1	3.67377 rad	3.194616 rad

El resultado proyectivo de la fotografía promedio sobre el MDT es el siguiente:

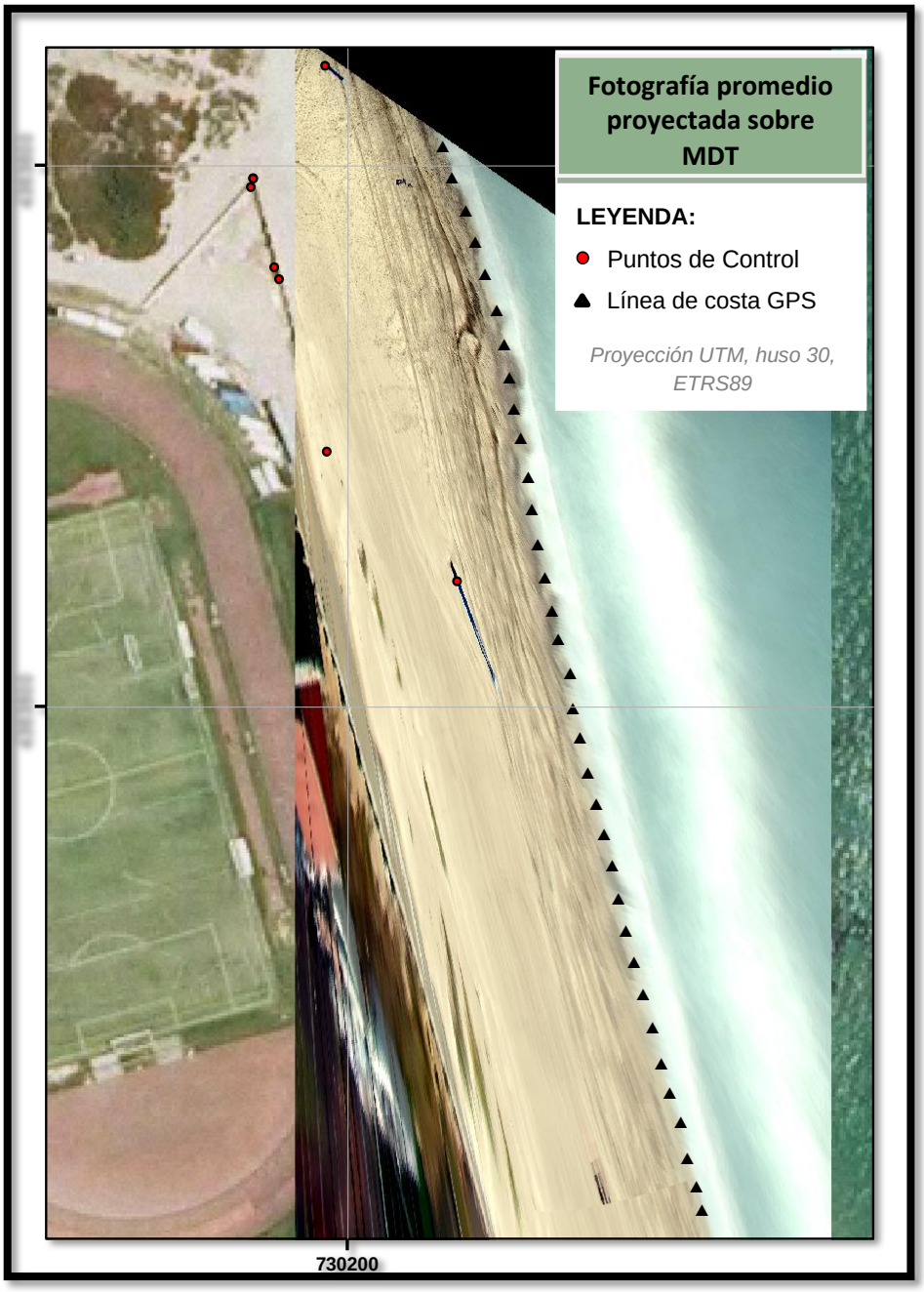


Figura 32: En el mapa se muestra de fondo la ortofoto del PNOA y, superpuesta, la fotografía promedio proyectada sobre el MDT de la playa de la zona Sur. Mediante puntos rojos se muestran los puntos de control utilizados, y con triángulos negros la línea de costa medida en campo con GPS.

Una última opción sería el trabajar con una imagen que represente la varianza de todo el conjunto de fotografías instantáneas (obtenida con software propio)y, proporcione las discrepancias entre cada una de las fotografías.

Sobre ésta, el criterio a seguir para digitalizar la línea de costa no sería tan evidente pero podría ser interpretada de forma inequívoca entre la zona oscura o con variaciones

insignificantes (zona de arena) y la primera franja de tonalidades claras (zona costera muy variante).

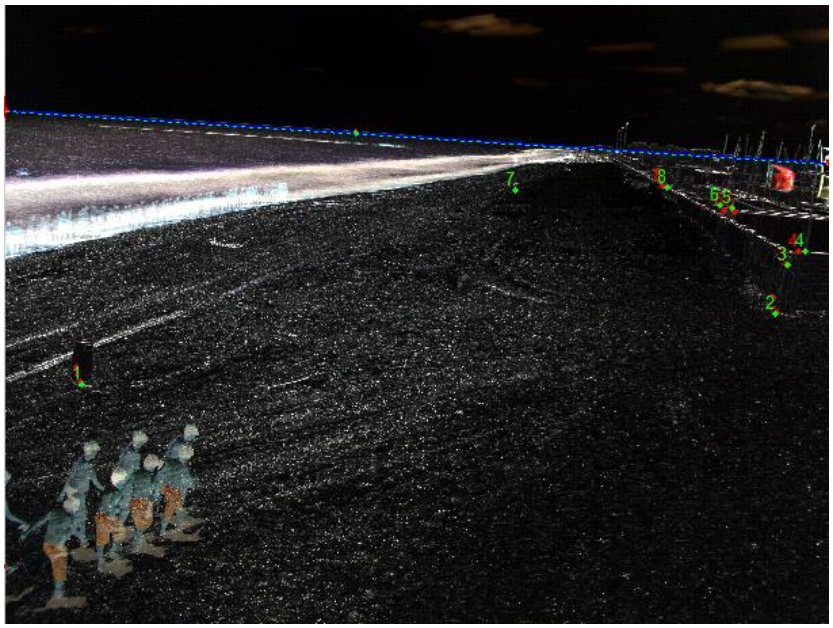


Figura 33: La imagen muestra la convergencia del sistema de ecuaciones respecto a los puntos de control (puntos en color verde) y la línea de horizonte (línea azul) en la imagen de varianzas.

Y una vez más el resultado de la proyección sobre un MDT es el siguiente:

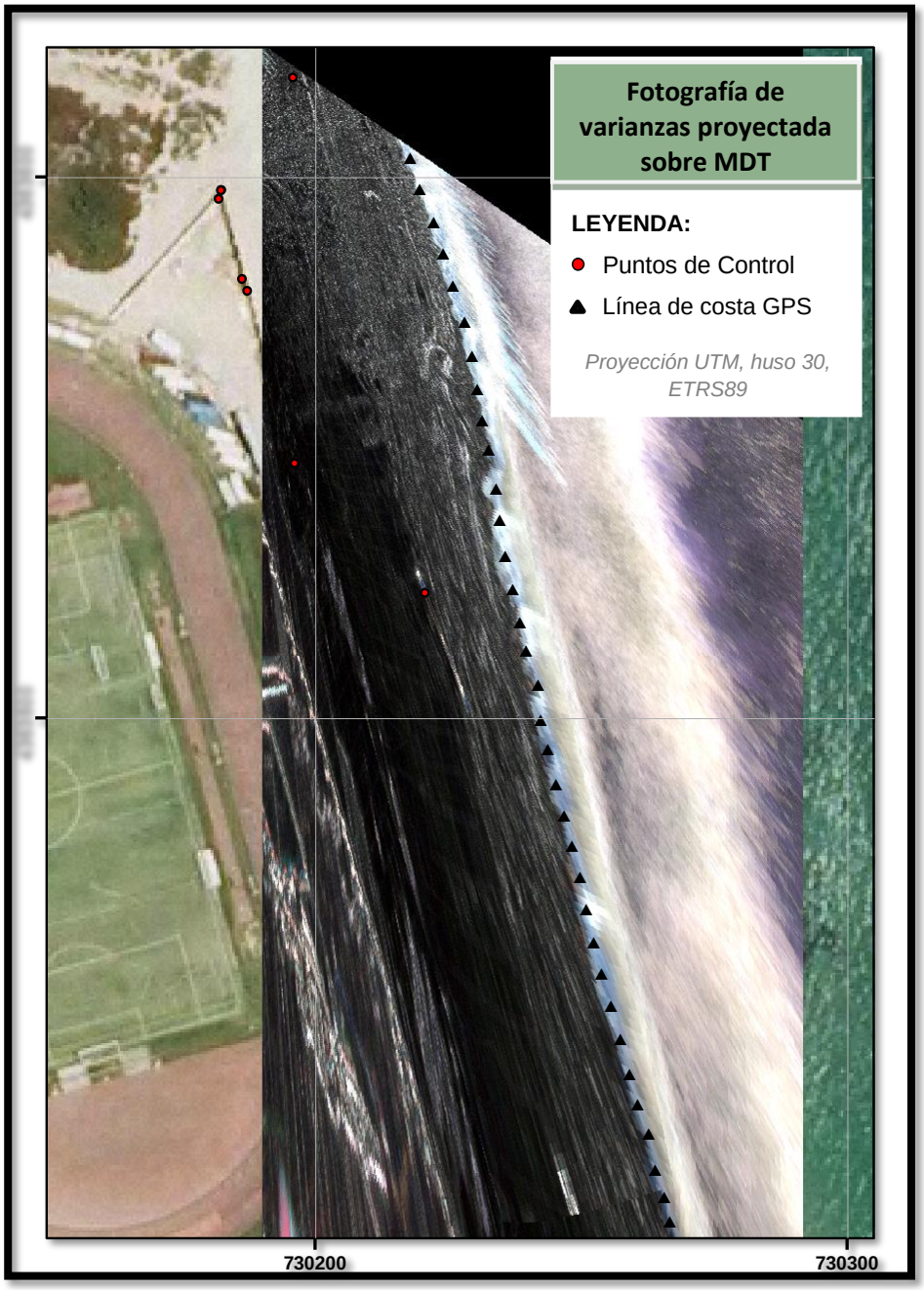


Figura 34: En el mapa se muestra de fondo la ortofoto del PNOA y encima la fotografía de varianzas proyectada sobre el MDT de la playa de la zona Sur. Mediante puntos rojos se muestran los puntos de control utilizados, y con triángulos negros la línea de costa medida en campo con GPS.

Como medida del análisis de error en la proyeción, se puede proyectar sobre la cota de un elemento identificable como pueda ser la papelera y medir la diferencia entre la posición real de ésta (punto de control tomado en la base de la misma) y la dibujada en la fotografía proyectada. Como se dispone de dos papeleras, una más próxima al lugar de la toma fotográfica a 23 m de distancia, que se corresponde con el punto de control número 1 y, otra a más de 120 m de distancia, que se corresponde con el punto de control número 7, se proyectará sobre el plano o cota de cada una de ellas y así podremos estimar también el error

conforme nos alejamos de la posición de la toma. El siguiente mapa muestra la proyección sobre la papelera más lejana (punto 7), y por ello se observa que la posición real y calculada del mismo son practicamente coincidentes, sin embargo, elementos de diferente cota a la de proyección, como pueda ser la línea de costa, presentan un error de desplazamiento:

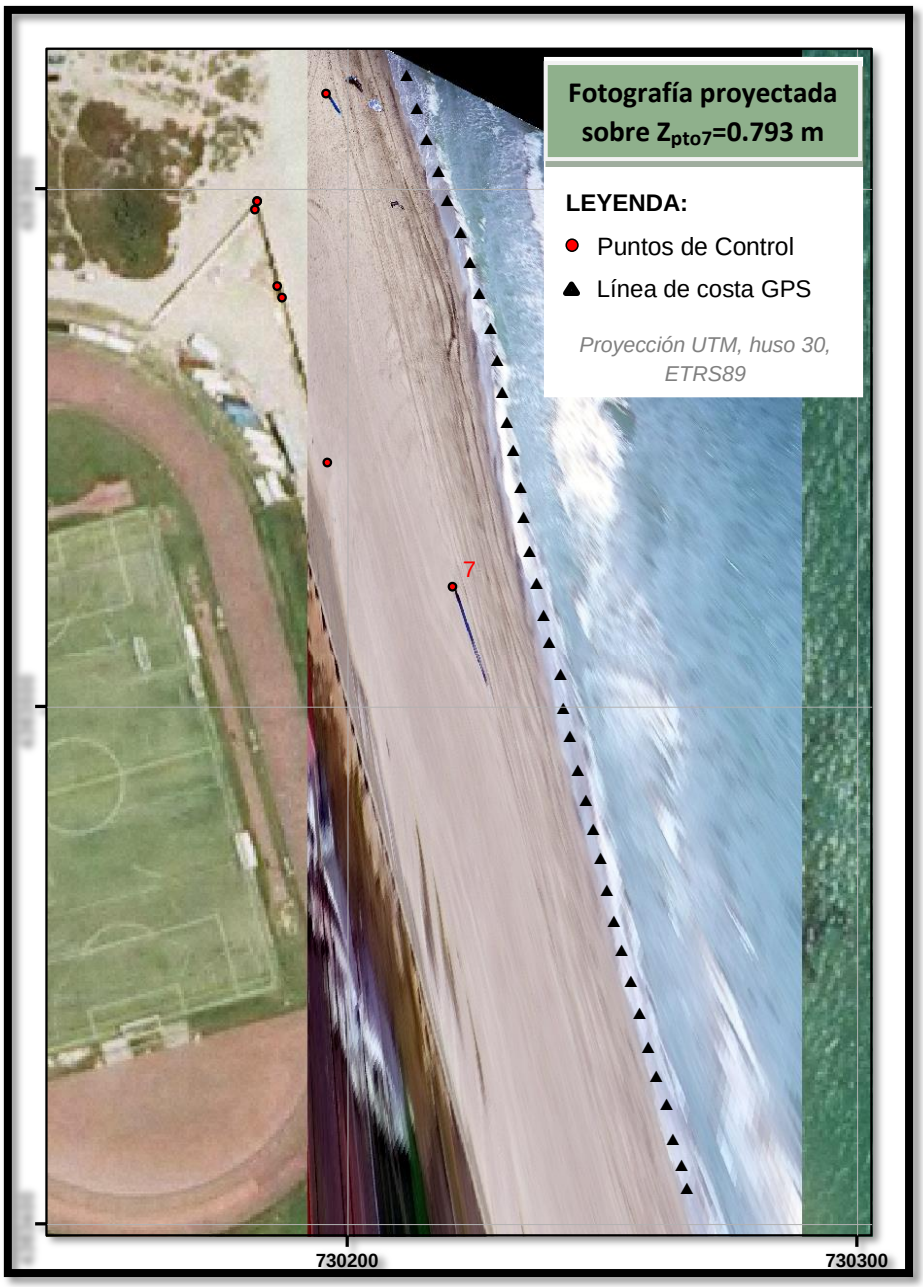


Figura 35: En el mapa se muestra de fondo la ortofoto del PNOA y encima la fotografía proyectada sobre la cota del punto de control número 7 (Z=0.793m) de la playa de la zona Sur.

Para medir la diferencia entre el punto de control número 7 proyectado y su posición real, se observa cómo se diferencian claramente las diferentes tonalidades de píxeles en la base de la papelera. A esta distancia, un píxel en la imagen original se corresponde con

aproximadamente 6 píxeles en la imagen proyectada, es decir 60 cm en la realidad. Por tanto podremos asegurar que el error en la detección del punto de control en la imagen proyectada rondará los 30 cm (su localización se marca en la siguiente captura con un punto amarillo):

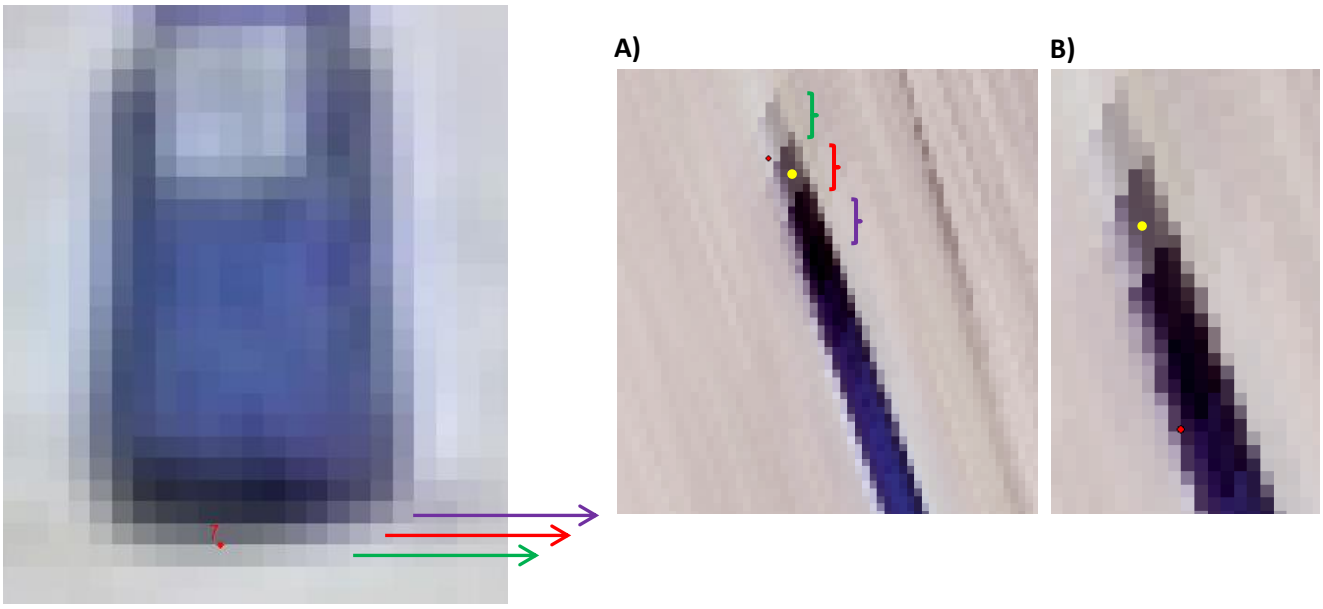


Figura 36: En la captura de la izquierda se muestra el punto de control número 7 seleccionado sobre la imagen original de entrada en el programa y, a la derecha, el mismo fragmento de imagen proyectado sobre la cota de este punto considerando la esfericidad terrestre en A) y sin considerarla en B). Así mismo se observan las diferentes proyecciones de los píxeles que componen la base de la papelera. El punto amarillo representa la posición proyectada del punto de control y, el punto rojo, su posición real (coordenadas GPS medidas). La diferencia entre ambos será por tanto el error en la proyección.

Para el punto de control número 1, más próximo a la toma fotográfica, se observa que un píxel en la imagen original abarca una porción insignificante en la imagen proyectada y, por tanto, la detección del mismo (representado con un punto amarillo) tendrá un error inferior a un píxel, es decir, de aproximadamente 10cm:

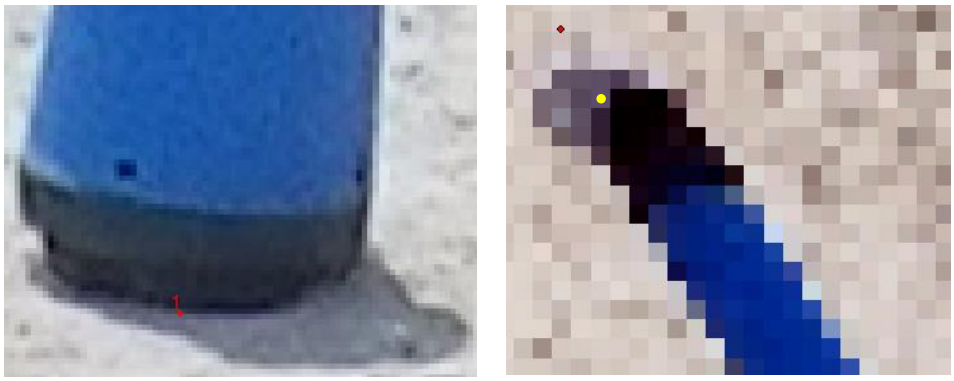


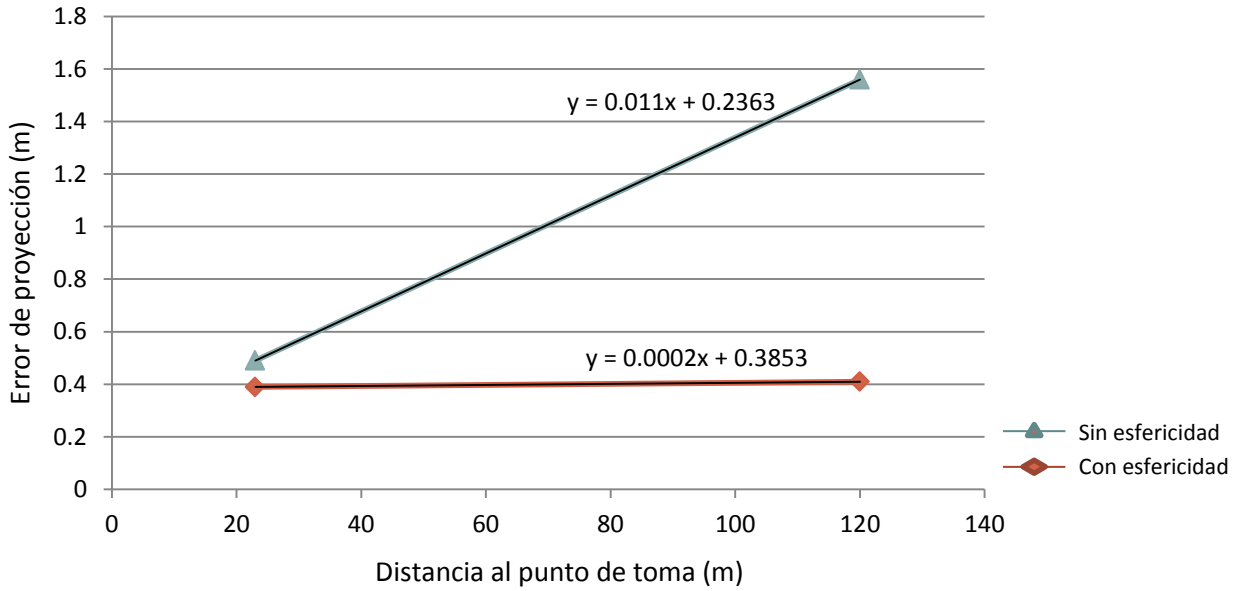
Figura 37: En la captura de la izquierda se muestra el punto de control número 1 seleccionado sobre la imagen original de entrada en el programa y, a la izquierda el mismo fragmento de imagen proyectado sobre la cota de este punto. El punto amarillo representa la posición proyectada del punto de control y, el punto rojo su posición real (coordenadas GPS medidas).

Punto de proyección	Diferencia entre punto proyectado y realidad (**error de proyección**)	
	Considerando la esfericidad	Sin corrección de esfericidad
1 (Z =0.789 m)	0.39 m	0.49 m
7 (Z =0.793 m)	0.41 m	1.56 m

Se observa que el error de la proyección, habiendo sido considerada la corrección de esfericidad terrestre, es similar a lo largo de toda la imagen proyectada, creciendo según la distancia a la que nos encontremos respecto el punto donde se realizó la toma fotográfica pero de forma muy suave. Esto es así ya que la ponderación introducida en el ajuste confería un peso mucho mayor conforme nos alejábamos del punto de toma y de este modo se ha conseguido equiparar el error, al menos hasta una distancia de 120 m. En el apartado siguiente este error proyectivo longitudinal se analizará con un mayor número de datos.

Por otro lado, cuando no se tiene en cuenta la esfericidad terrestre, se observa que efectivamente se tiene un error mucho más significativo conforme nos alejamos del punto de toma, concretamente 1.1 cm cada metro de avance llegando así a encontrarnos con un error de proyección de 1.56 m a 120 m de distancia.

La siguiente gráfica resume lo expuesto anteriormente:

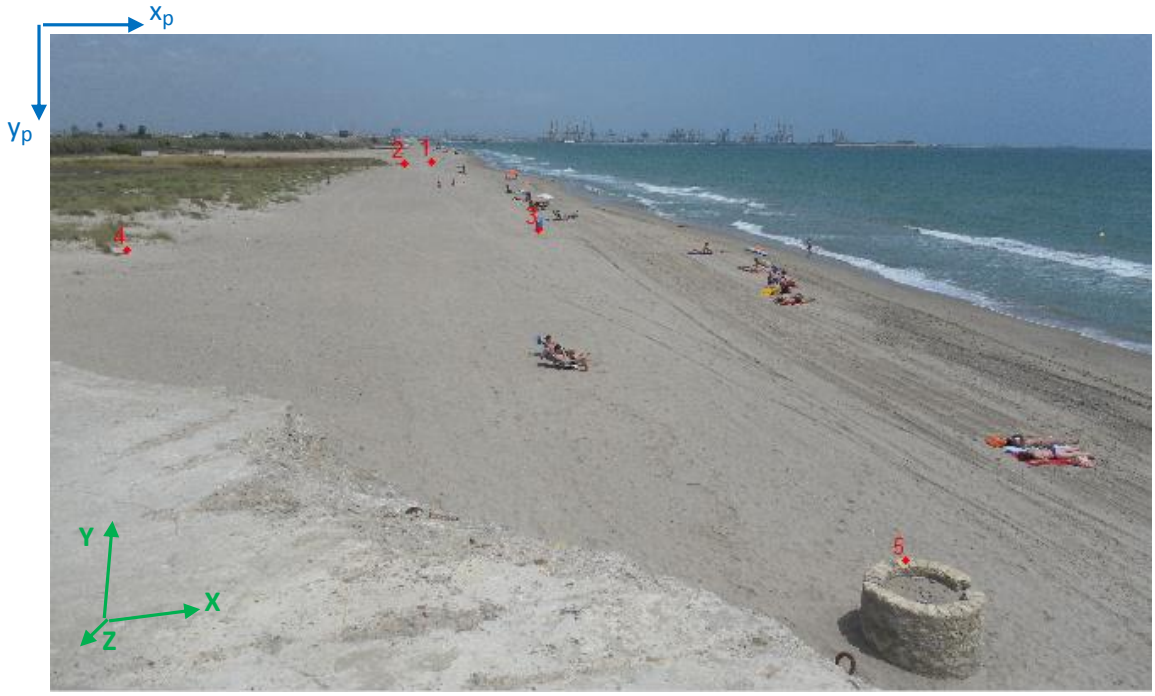


4.3.2 Zona Norte

El procedimiento metodológico para este sector parte del conocimiento de los parámetros de orientación interna (punto principal de la fotografía y distancia focal de la cámara) obtenidos de la calibración previa de la cámara Samsung ST60. A este respecto, el siguiente objetivo es obtener los parámetros de orientación externa; posición y orientación de la cámara en el momento de la captura fotográfica. Para ello se ha de establecer un vínculo entre el espacio terreno 3D (X, Y, Z) y el espacio imagen 2D (xp, yp) a partir de un determinado número de puntos de apoyo que variará en función del sistema matemático con que se trabaje.

Para proceder inicialmente con la TLD, tal y como se hizo para el caso de la playa Sur, se necesitaría un mínimo de seis puntos de control de los cuales no se dispone para esta zona ya que sólo fueron tomados cinco. Sin embargo, se puede abordar directamente el problema con las ecuaciones de colinealidad para las que sólo se necesitan tres puntos de control pese a que, por el contrario, requieren de unos valores iniciales de los parámetros con los que entrar en el proceso iterativo, inconveniente que no teníamos con la TLD.

La imagen de la zona norte así como la distribución de los puntos de control es la siguiente:



En la tabla se muestran las coordenadas imagen y terreno de los puntos de control, así como la ponderación asociada a los mismos:

Punto	xp (columnas)	yp (filas)	X (cm)	Y (cm)	Z (cm)	σ	Pesos ($P = \frac{1}{\sigma^2}$)
1	1444.5	1128.5	730119.267	4363923.634	1.168	1	1
2	1343.5	1137.5	730128.873	4363849.287	1.966	5	0.04
3	1823	1371.5	730173.975	4363711.368	0.834	2	0.25
4	363	1445	730156.830	4363682.596	2.458	3	0.11
5	3123.5	2538.5	730184.776	4363653.503	1.895	10	0.01

Las coordenadas planimétricas aproximadas de la posición de la cámara se pueden obtener fácilmente de un visor cartográfico como el SIGPAC o con cualquier sistema móvil con posicionamiento GPS. No obstante, si éstas no fueran lo suficientemente buenas como para conseguir que el sistema convergiese a la solución exacta, se entraría con dichos valores en las ecuaciones de Church para aproximarlas mejor.

Por otro lado, los valores iniciales de los ángulos se estiman en un valor cualquiera teniendo presente cómo se efectuó la fotografía. Con estos seis valores de entrada (X0, Y0, Z0, ω, φ, κ) se resuelve el sistema de colinealidad sin utilizar, en ningún caso, el constreñimiento de línea de horizonte y, pudiendo estimar el dejar los seis parámetros libres o fijar las coordenadas de la cámara y proceder a obtener únicamente los valores de los ángulos.

Posteriormente, con los seis nuevos valores aproximados obtenidos, se vuelve a iniciar el proceso por colinealidad esta vez ya incorporando el constreñimiento del horizonte y con el objeto de obtener los valores exactos con los que se comenzará el proceso proyectivo final. El procedimiento expuesto se muestra a continuación con cada uno de los resultados obtenidos:

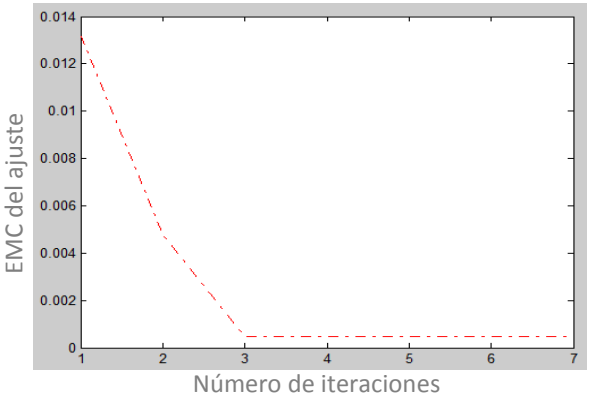
Se obtienen las coordenadas aproximadas rudas iniciales del lugar donde se encontraba la cámara según el visor SIGPAC:

Coordenadas aproximadas SIGPAC (m)		
X0	Y0	Z0
730181.9	4363638.97	10

Si entramos con estas coordenadas en la resolución del sistema de Church, el sistema mínimo cuadrático converge en la tercera iteración y el resultado obtenido se muestra en la tabla siguiente donde se compara con las coordenadas GPS que describen la posición exacta

donde se encontraba la cámara en el momento de la toma fotográfica. De este modo se verifica cómo van mejorando y aproximándose cada vez a sus valores reales.

Comportamiento ajuste Church



Coordenadas aproximadas por Church (m)

X0	Y0	Z0
730180.589	4363640.832	8.186

Coordenadas exactas GPS (m)

X0	Y0	Z0
730180.826	4363640.996	7.879

A continuación, con estas coordenadas de la posición de la cámara, se procede a buscar unos parámetros aproximados para los ángulos u orientación de la misma mediante colinealidad.

Dependiendo de la calidad de las coordenadas aproximadas conseguidas, se podrá escoger si se quiere dejar el sistema mínimo cuadrático con los seis parámetros libres o bien, en el caso que las coordenadas de la cámara se consideren lo suficientemente exactas (como pueda ser el resultado obtenido por Church), fijar éstas y dejar únicamente libres los parámetros de los tres ángulos. Las pruebas realizadas se resumen en los siguientes párrafos:

Los resultados obtenidos por colinealidad con los seis parámetros libres (*conjunto 1*) serán los que se muestran en la tabla siguiente tanto si se introducen como valores aproximados de la posición de la cámara las coordenadas SIGPAC, como si se introducen los valores calculados por Church. En cualquier caso, el valor inicial para los ángulos se estima en $\frac{\pi}{3}$.

	Coordenadas aprox. por colinealidad 6 parámetros
X0	730180.646 m
Y0	4363641.023 m
Z0	7.8596 m
ω	1.4382 rad
φ	-0.0105 rad
κ	0.0340 rad

No obstante, aunque llegan a la misma solución, el comportamiento de convergencia en las sucesivas iteraciones, tal y como denotan los siguientes gráficos, es diferente:

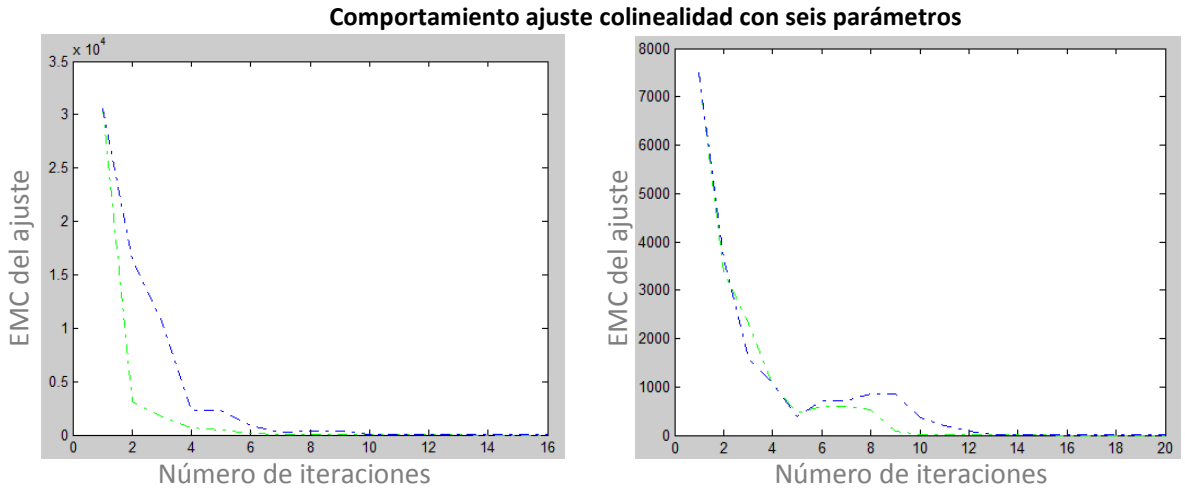
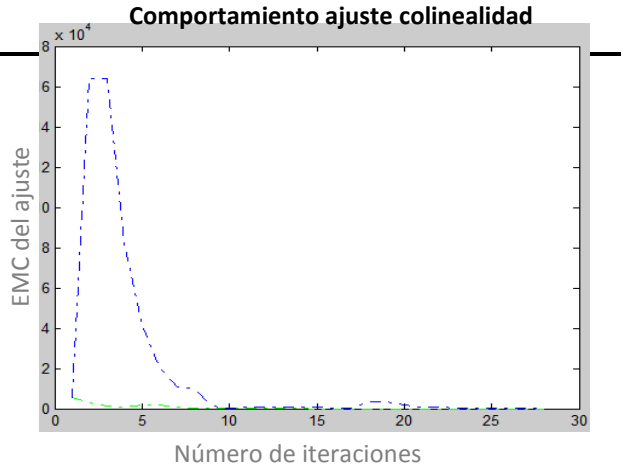


Figura 38: El gráfico de la izquierda muestra el comportamiento de las sucesivas iteraciones del ajuste introduciendo inicialmente las coordenadas X0, Y0, Z0 rudas del SIGPAC, mientras que el de la derecha empieza a partir de las obtenidas con Church; llegando ambos al mismo resultado. La trama verde muestra el comportamiento resolviendo por Levenberg Marquart sin escalado y en azul con escalado.

Sin embargo, considerando ahora las coordenadas aproximadas por Church como fijas (colinealidad con tres parámetros libres), los valores aproximados de los ángulos obtenidos son los siguientes (*conjunto2*):

	Coordenadas aprox. por colinealidad 3 parámetros
X0	730180.589 m
Y0	4363640.832 m
Z0	8.1862 m
ω	1.4366 rad
φ	-0.0142 rad
κ	0.0334 rad



Con estos conjuntos de valores estimados se iniciará nuevamente el proceso de colinealidad pero incorporando el constreñimiento de horizonte y la corrección de esfericidad terrestre para obtener así los seis parámetros de orientación externa definitivos. Con ambos conjuntos de parámetros aproximados (*conjunto 1 y 2*) el sistema (con 12 ecuaciones y 6 incógnitas) converge en la segunda iteración y, los resultados, no muestran diferencias significativas como para determinar qué metodología es mejor:

Coordenadas definitivas de los parámetros obtenidas por colinealidad con 6 parámetros

	Partiendo del *conjunto 1*	Partiendo del *conjunto 2*
X0	730180.667 m	730180.668 m
Y0	4363641.239 m	4363641.241 m
Z0	7.467 m	7.466 m
ω	1.4434 rad	1.4434 rad
φ	-0.0071 rad	-0.0068 rad
κ	0.0343 rad	0.0343 rad

Paralelamente y, antes de seguir con el proceso proyectivo de la fotografía, se realizó un estudio para analizar la capacidad de convergencia de Church y colinealidad, dependiendo de las coordenadas iniciales rudas introducidas. Para ello, se generó una cuadrícula cada 5 m que rodease el punto de coordenadas GPS desde donde se tomó la fotografía ($X0_{GPS}$, $Y0_{GPS}$, $Z0_{GPS}$ exactas) en un área de influencia de 100 m. De este modo, introduciendo cada una de estas coordenadas rudas bien en el sistema de Church, o bien mediante colinealidad con seis parámetros libres y un valor de $\frac{\pi}{3}$ para los ángulos, y analizando el resultado obtenido (X0', Y0', Z0'), se puede ver la capacidad de convergencia de cada método en función de lo buena que sea la aproximación de las coordenadas de entrada ($X0_{aprox}$, $Y0_{aprox}$, $Z0_{aprox}$), es decir, de lo alejadas que se encontrasen inicialmente respecto a la coordenada GPS.

Los siguientes gráficos muestran el error obtenido en la determinación de las coordenadas de la cámara en función del valor aproximado de éstas con que parte el ajuste. En el eje de ordenadas se representa el error obtenido ($\sqrt{(X0' - X0_{GPS})^2 + (Y0' - Y0_{GPS})^2 + (Z0' - Z0_{GPS})^2}$) en la determinación de las coordenadas bien por Church o por colinealidad y, en el de abscisas, el grado de aproximación de las coordenadas iniciales respecto a la posición correcta ($\sqrt{(X0_{aprox} - X0_{GPS})^2 + (Y0_{aprox} - Y0_{GPS})^2}$).

A continuación también se muestra, mediante dos mapas, dicha convergencia en función del método utilizado así como el grado de error cometido en la determinación de las coordenadas

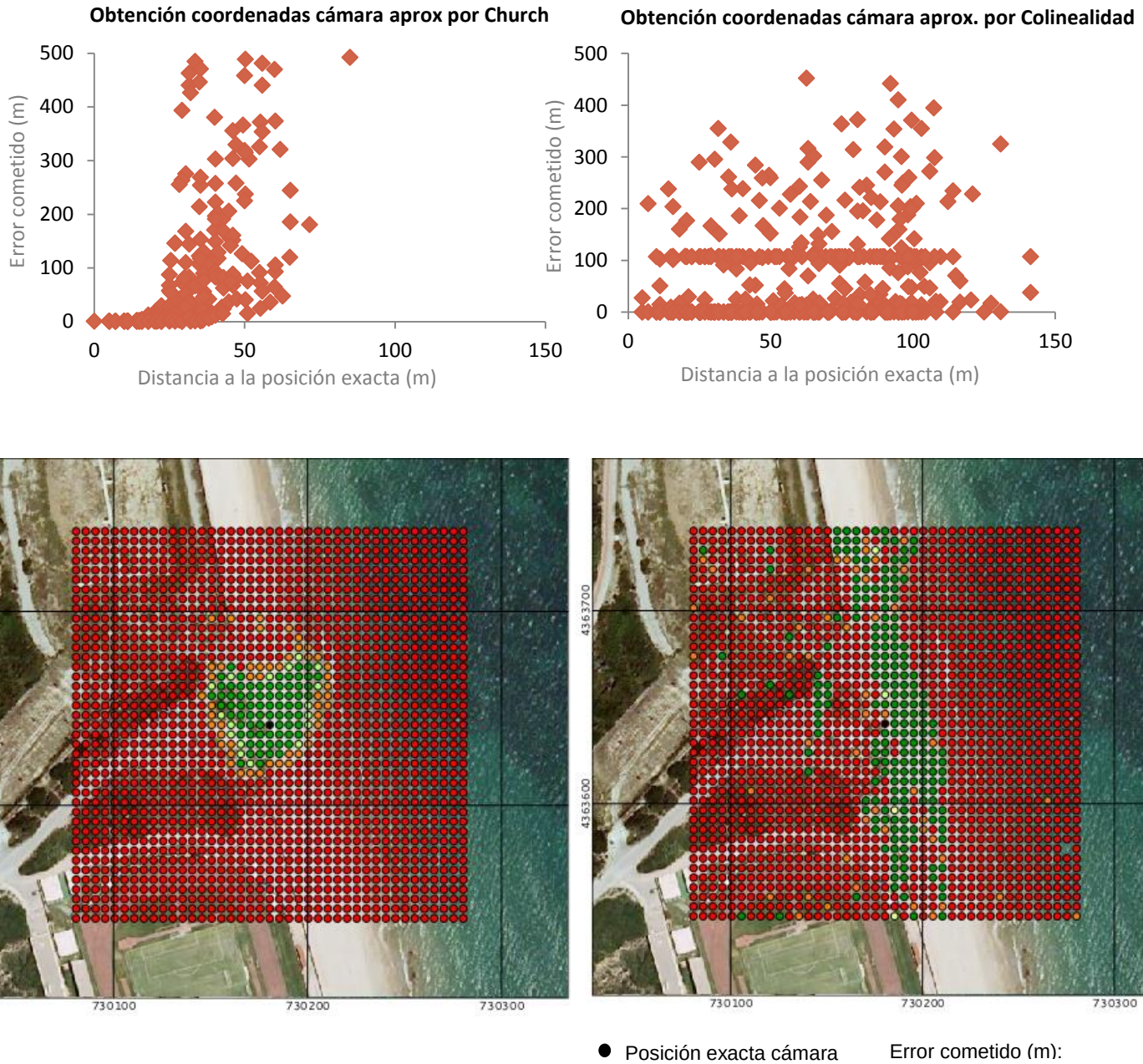


Figura 39: Los mapas muestran sobre la ortofoto del PNOA, la cuadrícula de coordenadas aproximadas iniciales generada y, el error cometido en la obtención de las coordenadas de la cámara para cada uno de las posiciones de entrada (cuadrícula).

Los resultados obtenidos nos indican que mediante colinealidad se llega en más ocasiones a un resultado correcto (X0', Y0', Z0') con errores mínimos (el valor del error promedio por colinealidad de todos los puntos con un error inferior a 5m de la figura anterior, es de 0.25 m). Sin embargo, Church nos proporciona una mayor consistencia debido a que cuando los valores iniciales de entrada en el sistema se encuentren a una distancia inferior a 30 m respecto a la posición exacta, ofrece una mayor seguridad de que el método va a encontrar unas coordenadas aproximadas mejores (el valor del error promedio por Church de todos los puntos con un error inferior a 5m de la figura anterior, es de 1.41 m), mientras que colinealidad en ocasiones puede fallar, tal y como se observa en los gráficos de la figura anterior.

Probablemente el hecho de que el método de colinealidad haya convergido de forma no equidistante se deba a los ángulos de entrada aproximados que este método requiere, a diferencia del de Church.

Retomando el proceso metodológico de obtención de las coordenadas de orientación externa, es importante decir que el ajuste finalizó consiguiendo un error mínimo cuadrático adimensional de 2.659 según el ajuste ponderado, y de 19.01 píxeles para el ajuste sin ponderación. A continuación, el programa calculará los parámetros TLD asociados a estos seis parámetros de orientación externa.

El siguiente paso consiste en la selección del área que se desea proyectar en la imagen que será la siguiente:

En total, las dimensiones terreno de la zona a proyectar van a ser de 131.303 m en la coordenada X y, 685.964 m para la coordenada Y. Sobre esta área de trabajo se generará una cuadrícula de coordenadas terreno con el tamaño de pixel introducido por el usuario.

Siguiendo con el ejemplo y para un tamaño de pixel de 10cm, sabemos que la cuadrícula estará formada por un total de 1314 píxeles en las columnas (eje X), y 6860 píxeles en las filas (eje Y), según las dimensiones de la imagen proyectada de salida.

Como en este tramo no se dispone de ningún MDT se proyectará sobre un plano de cota cero ya que lo que nos interesa que quede correctamente georreferenciado es la línea de costa, de altitud muy similar a este valor.

Para realizar la proyección se puede elegir el trabajar bien con las ecuaciones de la TLD como mediante colinealidad, obteniendo el mismo resultado por ambos métodos. Así mismo, la radiometría de la imagen se genera siguiendo el método del vecino más próximo.

El resultado de la proyección es el que se muestra a continuación:

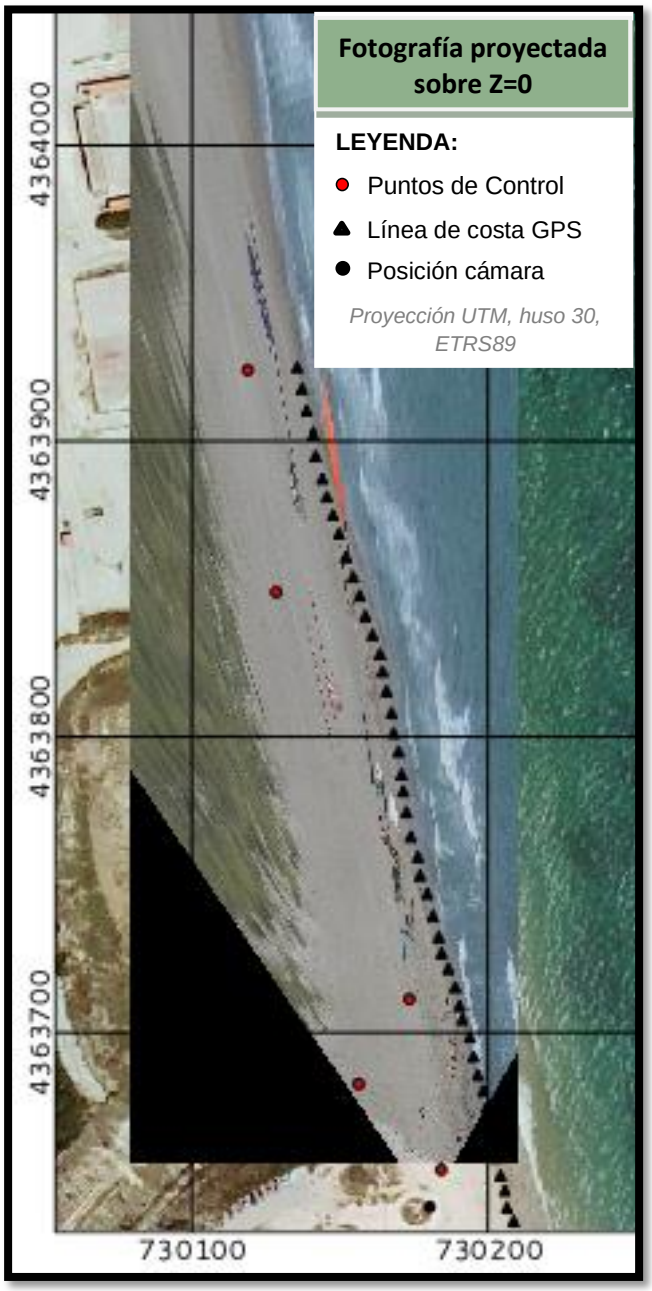


Figura 40: En el mapa se muestra de fondo la ortofoto del PNOA y, superpuesta, la fotografía proyectada sobre el plano Z=0 de la playa de la zona Norte.

Al proyectar sobre el plano Z=0, se observa que conforme aumentamos la cota a lo largo del perfil de playa, se manifiesta un desplazamiento considerable debido a esta diferencia de altura, y mayor será conforme nos alejemos de la posición de toma, es decir, en este caso, hacia el norte.

Por tanto, como medida del análisis de error longitudinal en la proyeción, se proyectará nuevamente sobre la cota de un elemento identificable como las papeleras, midiendo así la diferencia entre la posición real de éstas (puntos de control tomados en la base de la misma) y, las dibujadas en la fotografía proyectada. Se dispone de dos papeleras, una más próxima al lugar de la toma fotográfica a 71 m de distancia que se corresponde con el

punto de control número 3 y, otra a más de 290 m de distancia que se corresponde con el punto de control número 1, proyectaremos sobre el plano o cota de cada una de ellas (Z=0.834 y Z=1.168 m, respectivamente) pudiendo así estimar el error conforme nos alejamos de la posición de la toma. Hay que tener en cuenta que un píxel de la imagen original se proyecta en un mayor número de píxeles conforme aumenta la distancia y, por tanto, la indeterminación en la estimación de la posición del punto proyectado también será mayor. Paralelamente, también se comprobó que la magnitud del error era íntimamente dependiente de la bondad del ajuste previo donde se obtuvieron los parámetros de orientación externa con que se efectuará la proyección. En éste influirá tanto el acierto en la identificación de los puntos de control en la imagen, como la selección de los dos puntos de fuga que definiran la ecuación de línea de horizonte.

Aunando los resultados obtenidos sobre las papeleras para diferentes fotografías tomadas desde diversas posiciones e incluso en diferente día, así como los resultados del sector de playa sur, se obtiene el gráfico que a continuación se muestra:

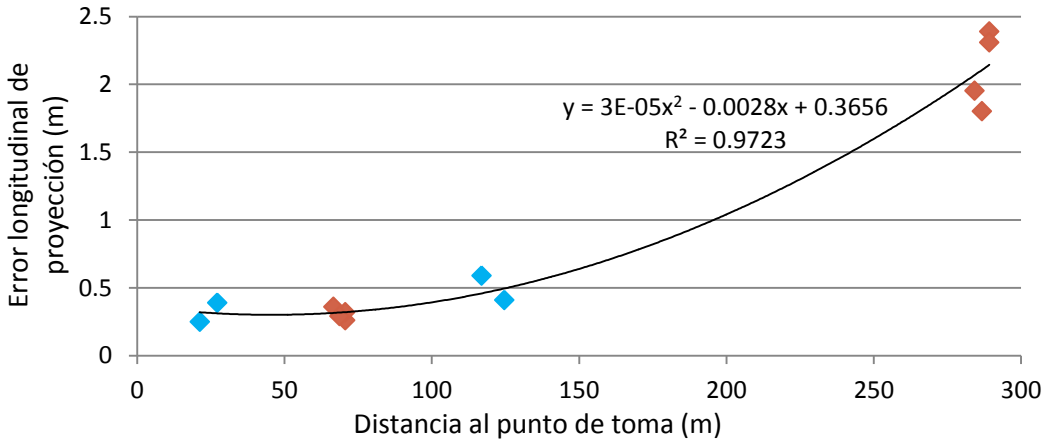


Figura 41: El gráfico muestra la tendencia que sigue el error acaecido en la imagen proyectada y georreferenciada en función de la distancia al punto desde donde se realizó la toma fotográfica. En azul se representan dos muestras de errores tomadas de las papeleras de la zona Sur y, en rojo, cuatro muestras de la zona Norte.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento del error longitudinal de la proyección, el cual se ajusta a un polinomio de segundo grado. Describe cómo, hasta aproximadamente una distancia de 150 m, el error oscilará en torno a 0.5m (valor que se ha mantenido en parte gracias a la ponderación establecida en el ajuste y, que ya se comprobó en el apartado anterior para la zona Sur), pero poco después experimentará una inflexión que provocará una acceleración en el aumento del error en función de la distancia, llegando a presentar un error de casi 2.5 m a una distancia de 290 m.

5. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

5.1. Línea de costa proyectada vs línea GPS

Una vez testeado el error longitudinal existente en el fotograma proyectado, se analizará a continuación el error transversal. Para ello, se compararan los datos GPS, medidos en campo y que dibujan la trayectoria de la línea de costa a lo largo del sector analizado, con cada línea digitalizada, resultado de la proyección de una fotografía.

Recordemos que la línea GPS se midió entendiéndola como la posición intermedia entre el nivel máximo de mojado que alcanza la ola tierra adentro y, aquel punto donde siempre hay agua. Según estas premisas y considerando la alta precisión en la toma de puntos de este intrumental, se establece finalmente un error de aproximadamente 0.5 m en la determinación de dicha línea de costa.

Siguiendo con esta definición, se digitalizó la línea de costa en cada una de las fotografías proyectadas instantáneas calculadas bien habiendo corregido el error de esfericidad terrestre o sin considerarlo.

Figura 42: Fotografía con cámara infrarroja que permite detectar toda la zona de mojado (máximo alcance y retirada del oleaje) y por tanto ejemplifica claramente la definición de línea de costa seguida tanto en la medición GPS como en la digitalización (línea azul).

A continuación se muestra el resultado del análisis comparativo entre estas líneas de costa frente a la obtenida por técnicas GPS con el objeto de estimar la validez de las mismas. Para ello se calculó la diferencia transversal entre ambas líneas cada 7 metros de litoral (que es

la distancia a la que tenemos cada dato GPS) y, se calculó la media y desviación estándar de todas ellas; valores que se resumen en el cuadro siguiente:

Diferencia entre la línea GPS y la línea de costa obtenida de la imagen proyectada (m)							
Instantánea 1				***Instantánea 2***			
Sin esfericidad		Con esfericidad		Sin esfericidad		Con esfericidad	
μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
0.7985	0.5172	0.084	0.624	1.0488	0.968	0.6523	0.684

Los resultados denotan, una vez más, la necesidad de introducir la corrección por esfericidad terrestre en el proceso metodológico de la proyección de una imagen de gran alcance ya que con ésta mejoran notoriamente, se aproximan más a la línea GPS y su distribución queda más centrada en la media. Se observa que la línea proyectada se aleja de la línea GPS en 0.08 m y 0.65 m para dos instantes diferentes, mientras que sin considerar la esfericidad terrestre los valores aumentan. Por otro lado, las desviaciones estándar explican la imprecisión y variabilidad implícita en la digitalización de la línea sobre la fotografía proyectada.

En el siguiente gráfico se muestra la distribución que siguen los valores de las diferencias entre la línea GPS y las proyectadas de la fotografía instantánea 1. Se observa claramente que los valores referentes a la línea corregida de esfericidad terrestre, siguen una distribución normal centrada en un valor medio mucho más próximo a cero.

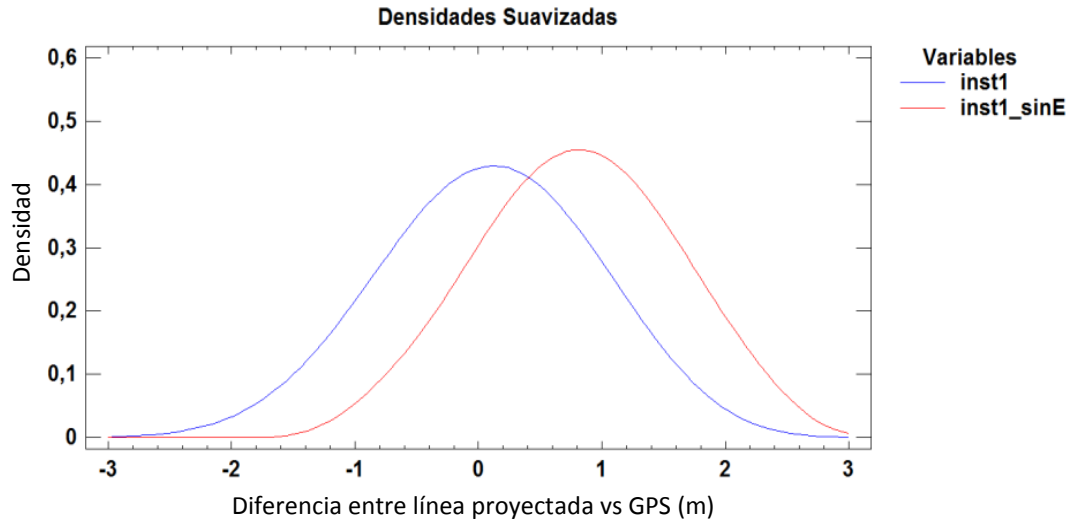


Figura 43: Comparación entre dos distribuciones de datos dependiendo de si se ha considerado o no la corrección de esfericidad terrestre. En azul se muestra la distribución de datos para la fotografía instantánea 1 corregida de esfericidad y, en rojo, sin corrección de esfericidad.

Así mismo, se comprueba el efecto debido a no considerar la corrección por esfericidad esta vez en cuanto al error transversal.

Conforme nos alejamos del lugar donde se realizó la toma fotográfica, es decir, en dirección sur para la fotografía de la zona Sur, las diferencias entre nuestra línea proyectada y la GPS son cada vez mayores en el caso de no considerar la esfericidad mientras que considerándola, tales diferencias se mantienen prácticamente invariables (ver figura 44). El resultado era esperable según el mismo concepto del error de esfericidad ya que éste se hace significativo proporcionalmente a la distancia respecto a la que se encuentre un determinado punto. Además, esto indica que la corrección influye y es necesaria para el cálculo de los ángulos de orientación externa en el ajuste, consiguiendo así que la línea de costa se encuentre en la alineación correcta pese a que los puntos de la costa estén más o menos cerca de su posición exacta (función del error longitudinal visto en figura 41).

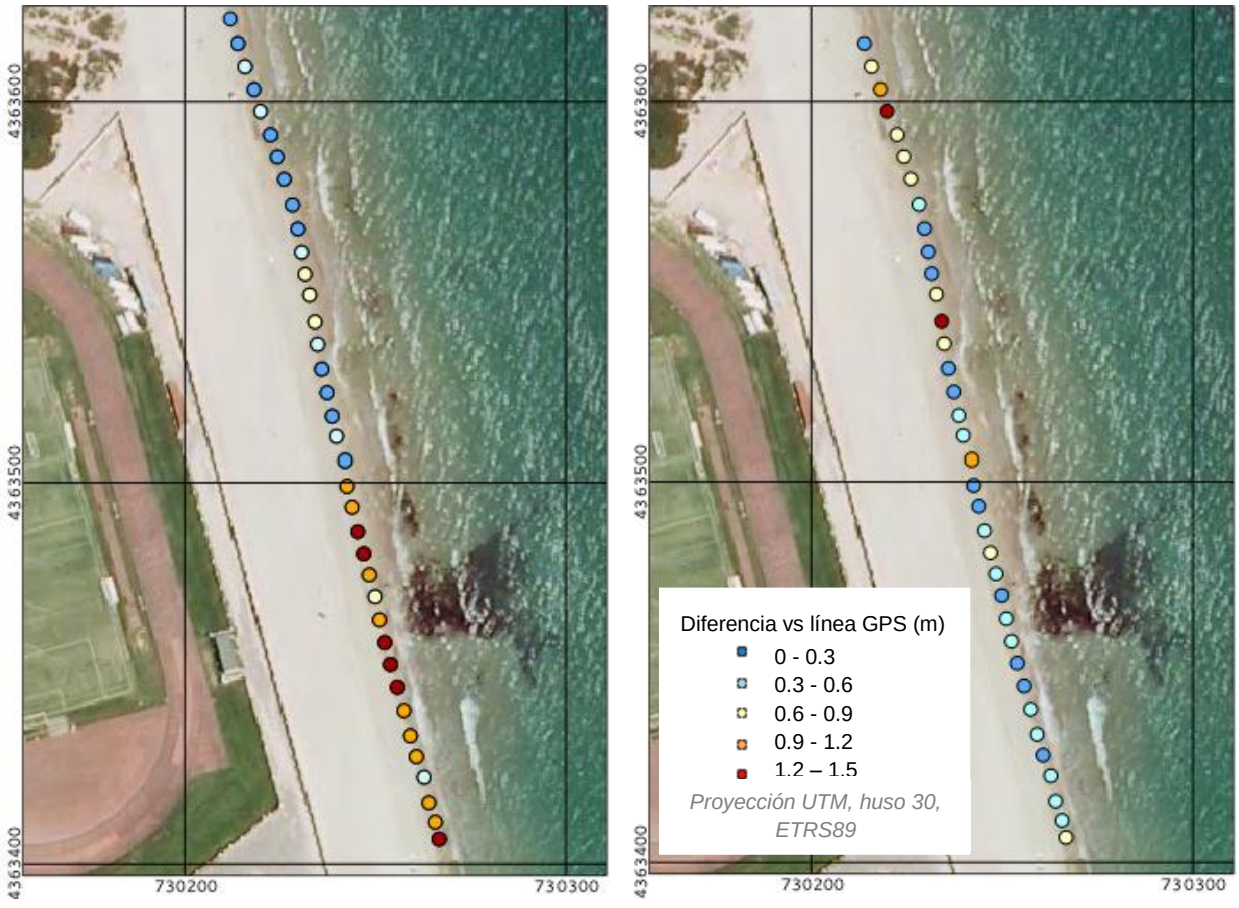


Figura 44: Los siguientes mapas del sector Sur muestran el valor absoluto de la diferencia entre cada dato GPS (representativo de la línea de costa) y la línea proyectada resultado de la fotografía instantánea 1. En el resultado de la izquierda se ha comparado la línea proyectada sin corrección de esfericidad mientras que la de la derecha si ha considerado la esfericidad terrestre.

Se muestra también un mapa con el resultado del error transversal para la playa de la zona Norte donde nuevamente se observa que las diferencias entre nuestra línea proyectada y la GPS, en el caso de considerar la esfericidad terrestre, no presenta relación con el desplazamiento respecto al punto donde fue tomada la fotografía, es decir, las magnitudes del error son similares a lo largo de todo el sector costero estudiado.

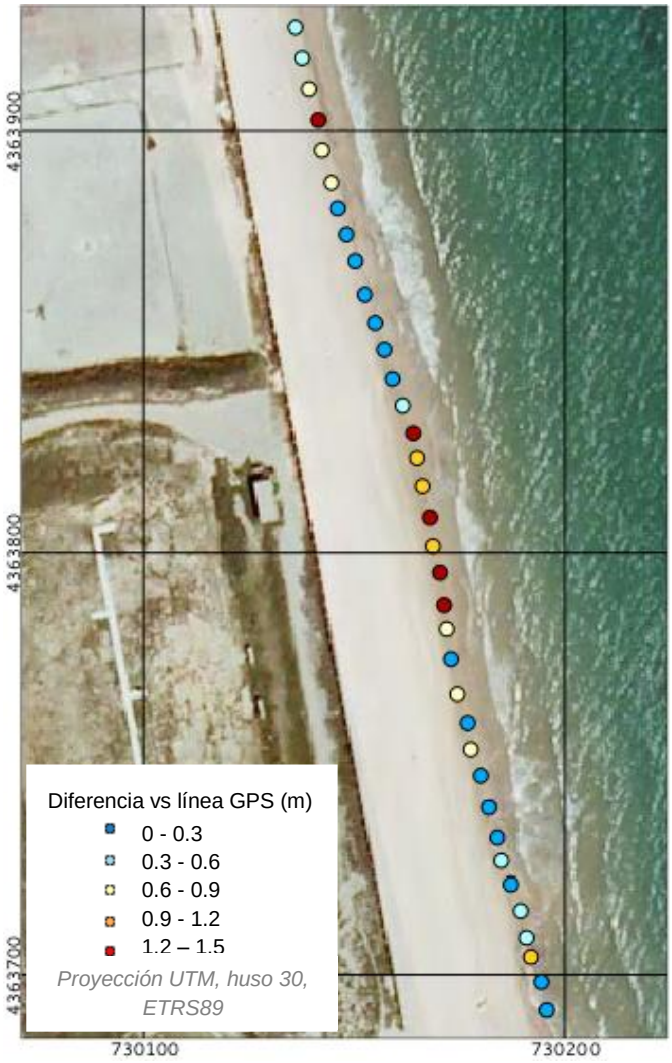


Figura 45: Mapa del sector Norte donde se muestra el valor absoluto de la diferencia entre cada dato GPS (representativo de la línea de costa) y la línea proyectada, resultado de una fotografía instantánea capturada en un momento de tiempo muy próximo y, considerando la corrección por esfericidad terrestre.

A continuación realizaremos un análisis comparativo muy similar pero esta vez respecto a líneas de costa obtenidas de la proyección de la imagen promedio.

La imagen promedio consigue obviar los movimientos aleatorios del oleaje y mostrándonos por tanto de forma más clara la línea de costa que buscamos. Por ello, la digitalización sobre ésta era mucho más intuitiva y con menor subjetividad para el operario.

Los resultados resumidos en la siguiente tabla vuelven a corroborar todo lo expuesto anteriormente:

Diferencia entre la línea GPS y la línea de costa media proyectada (m)			
Sin esfericidad		Con Esfericidad	
μ	σ	μ	σ
0.3071	0.591	0.1858	0.551

En el siguiente gráfico se muestra la distribución que siguen los valores de las diferencias entre la línea GPS y las proyectadas de la fotografía promedio. Se observa tímidamente que los valores referentes a la línea corregida de esfericidad terrestre, siguen una distribución normal centrada en un valor medio algo más próximo a cero.

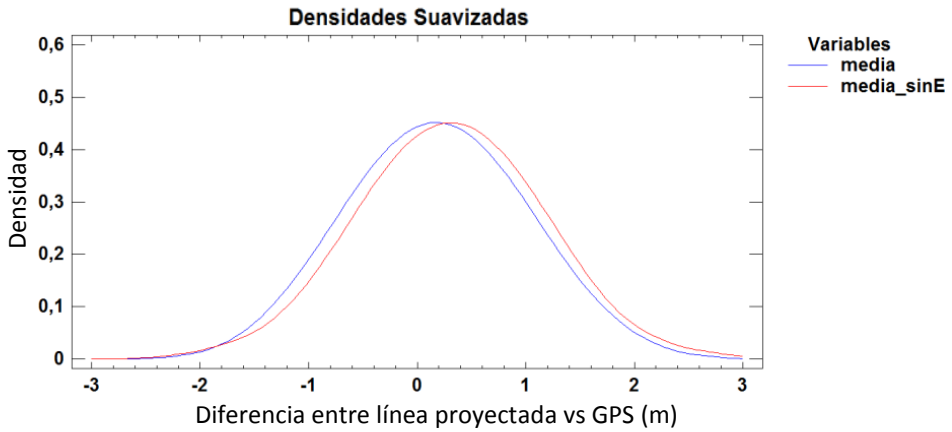


Figura 46: Comparación entre dos distribuciones de datos dependiendo de si se ha considerado o no la corrección de esfericidad terrestre. En azul se muestra la distribución de datos para la fotografía promedio corregida de esfericidad y, en rojo, sin corrección de esfericidad.

En este estudio también se puede comprobar la necesidad de utilizar el constreñimiento de línea de horizonte en el proceso de proyección de un fotograma de la playa. El ajuste ya nos indicó que sin éste, en ocasiones, el sistema tenía problemas para converger en la posición exacta (principalmente cuando no se disponía de los parámetros aproximados de orientación externa) ya que los valores calculados de los giros no eran los correctos. Por tanto, y como era de esperar, el fotograma solución no quedará correctamente proyectado y georreferenciado.

Tras proyectar las fotografías con la herramienta generada en este proyecto e indicando al programa que no utilice el constreñimiento de línea de horizonte para la resolución del ajuste, se digitalizará la línea de costa y se comparará con la línea GPS obteniendo los siguientes resultados:

Diferencia entre la línea GPS y la línea de costa obtenida de la imagen proyectada (m)			
Media		***Instantánea 1***	
Sin Constreñimiento Horizonte		Sin Constreñimiento Horizonte	
μ	σ	μ	σ
-3.130	2.107	-1.037	0.637

Los resultados obtenidos son mucho peores que los que se tenía con el constreñimiento del horizonte tanto para una fotografía instantánea como para la promedio. No obstante, es importante tener en cuenta que el ajuste de la imagen media ya nos había indicado que los parámetros de orientación externa no se habían estimado correctamente.

El signo negativo en el valor de la media nos indica que el efecto de no utilizar el constreñimiento de línea de horizonte, proyecta y orienta la fotografía de forma que la línea de costa se queda tierra adentro respecto a su posición real. Este fenómeno se muestra claramente en el siguiente mapa:

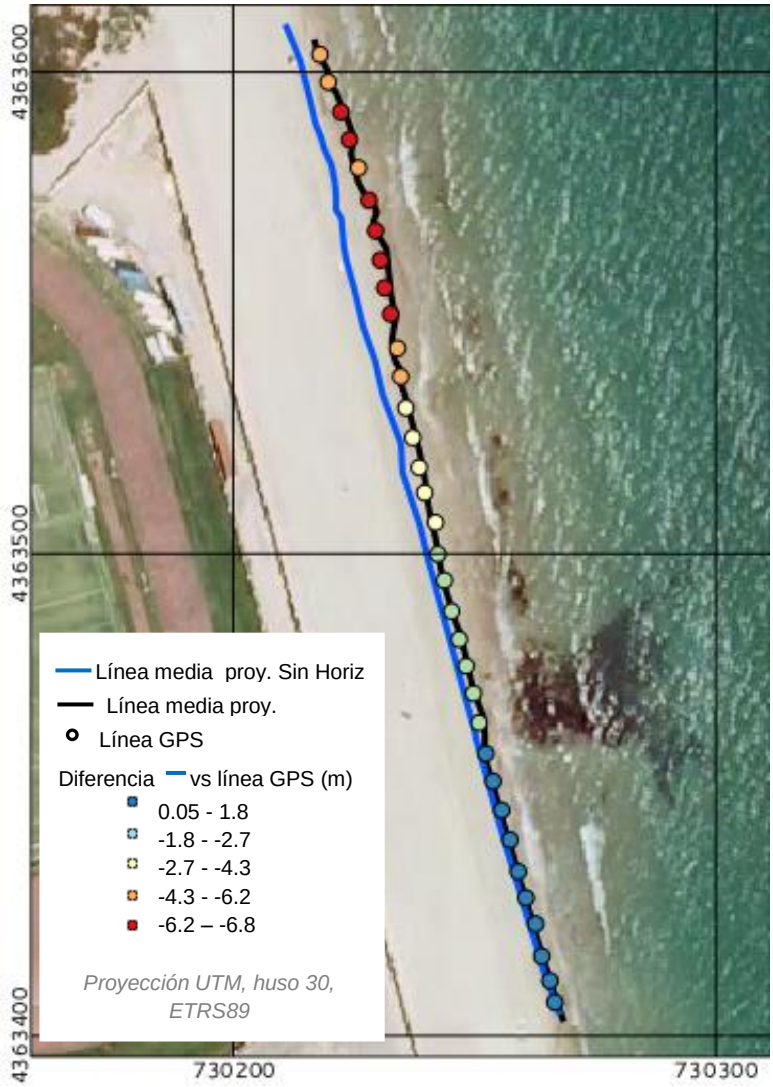


Figura 47: El mapa muestra dos líneas de costa promedio, una obtenida de la imagen proyectada sin considerar el constreñimiento del horizonte (línea azul), y otra obtenida de la imagen proyectada considerando tanto el constreñimiento de horizonte como el efecto de esfericidad (negro). Además se representa con puntos la línea GPS medida en un instante concreto y se colorea en función de la magnitud de la diferencia entre la línea GPS y la proyectada sin constreñimiento de horizonte.

El gráfico también nos muestra esta tendencia errónea de ubicar la imagen tierra adentro (valores negativos) provocada por la falta del constreñimiento de horizonte tanto en la imagen promedio como en la instantánea:

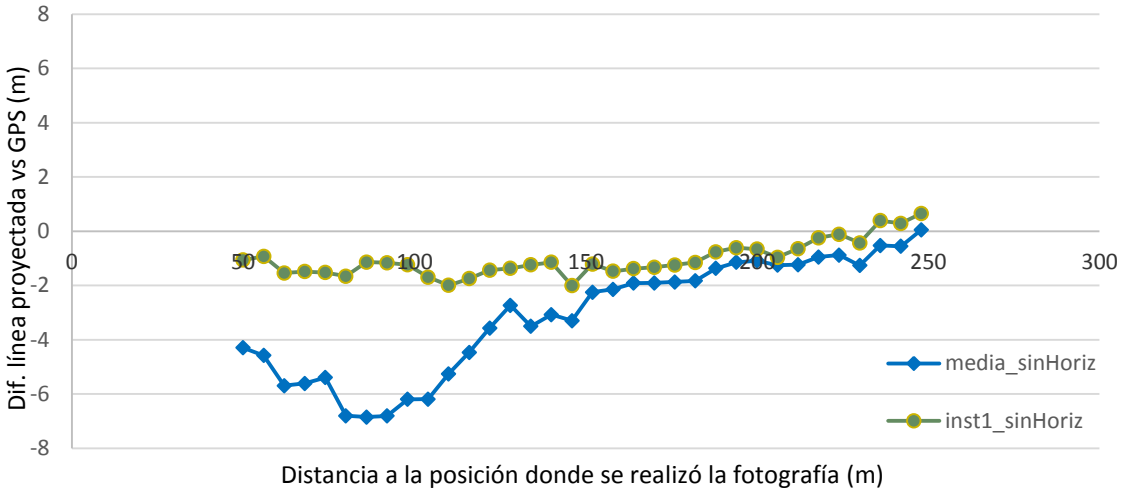


Figura 48: El gráfico muestra las diferencias entre dos líneas proyectadas, sin constreñimiento de horizonte, y la línea GPS, a lo largo de toda la zona de estudio, y de Norte a Sur (conforme nos separamos del punto donde se tomó la fotografía). En azul se representan las diferencias respecto a la línea media y en verde respecto a la fotografía instantánea 1.

Por último y, a modo de resumen, aglutinaremos los tres resultados (considerando la esfericidad terrestre, sin considerarla y, por último, sin el constreñimiento de línea de horizonte) tanto de una fotografía instantánea como de la imagen promedio.

En los siguientes diagramas de caja y bigotes, se describe la dispersión y simetría de los datos y se representan los tres cuartiles y los valores mínimo y máximo sobre un rectángulo. El segmento vertical que divide el rectángulo indica donde se posiciona la mediana.

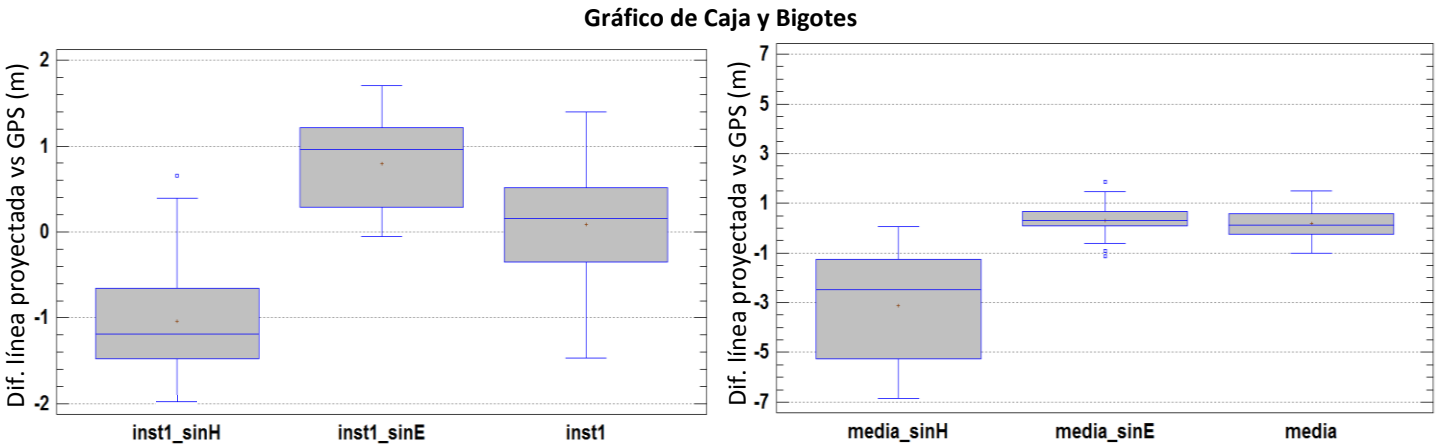


Figura 49: La figura nos muestra dos gráficas de caja y bigotes donde se comparan los resultados obtenidos de las líneas de costa calculadas bien sin considerar el constreñimiento de línea de horizonte (caja izquierda) o bien considerándolo y, en él, incluir (caja derecha) o no (caja central) la corrección por esfericidad terrestre. El gráfico de la izquierda compara estos tres resultados obtenidos a partir de una fotografía instantánea mientras que el de la derecha compara los resultados obtenidos a partir de la fotografía promedio calculada.

El peor resultado se obtiene, sin lugar a dudas, cuando no se considera el constreñimiento de línea de horizonte ya que existen importantes diferencias frente a la línea GPS, tenemos un valor de mediana de -2.5 m para los resultados obtenidos con la fotografía promedio y de -1.2 m para la instantánea. Los otros dos resultados sí consideran en ambos casos el constreñimiento geométrico que supone la línea de horizonte pero uno se obtiene introduciendo en estas ecuaciones la corrección por esfericidad terrestre, mientras que en el otro no. Analizando los gráficos se verifica de nuevo la necesidad de introducir esta corrección ya que los resultados se concentran más sobre el valor cero que significa unas diferencias muy pequeñas frente a la línea GPS. La dispersión que representan los bigotes del gráfico se debe al propio error implícito (grado de incertidumbre del usuario) en el proceso de digitalización de la línea de costa sobre la imagen proyectada. No obstante, las magnitudes de incertidumbre de las que hablamos, inferiores a 2 m, se consideran sobradamente válidas en el contexto que nos encontramos donde la propia variabilidad que presenta el fenómeno analizado supera tales resultados.

5.2. Línea GPS vs línea Landsat

Por último, este apartado pretende estudiar, interpretar y describir cuál es la línea de costa detectada con el algoritmo (Pardo *et al*., 2012) a partir de imágenes de Landsat-8 en sectores no rigidizados como son las playas micromareales. A este respecto se compararan éstas con la línea de costa GPS medida y, consecuentemente, con la línea media proyectada por la gran similitud encontrada con la GPS (como se vio en el anterior apartado).

Se comparará con tres líneas Landsat correspondientes a las bandas 5, 6 y 7 del infrarrojo, que oscilan entre las longitudes de onda de 0.845-0.885 µm, 1.56-1.66 µm y 2.1-2.3 µm, respectivamente.

Efectivamente los resultados verifican que no es lógico comparar las líneas de costa Landsat con la GPS debido a que no se está analizando el mismo fenómeno en ambos casos.

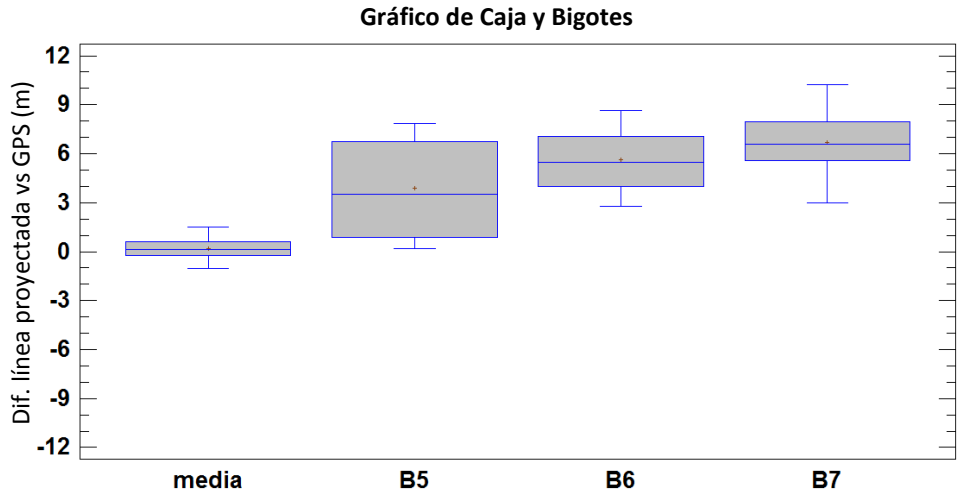
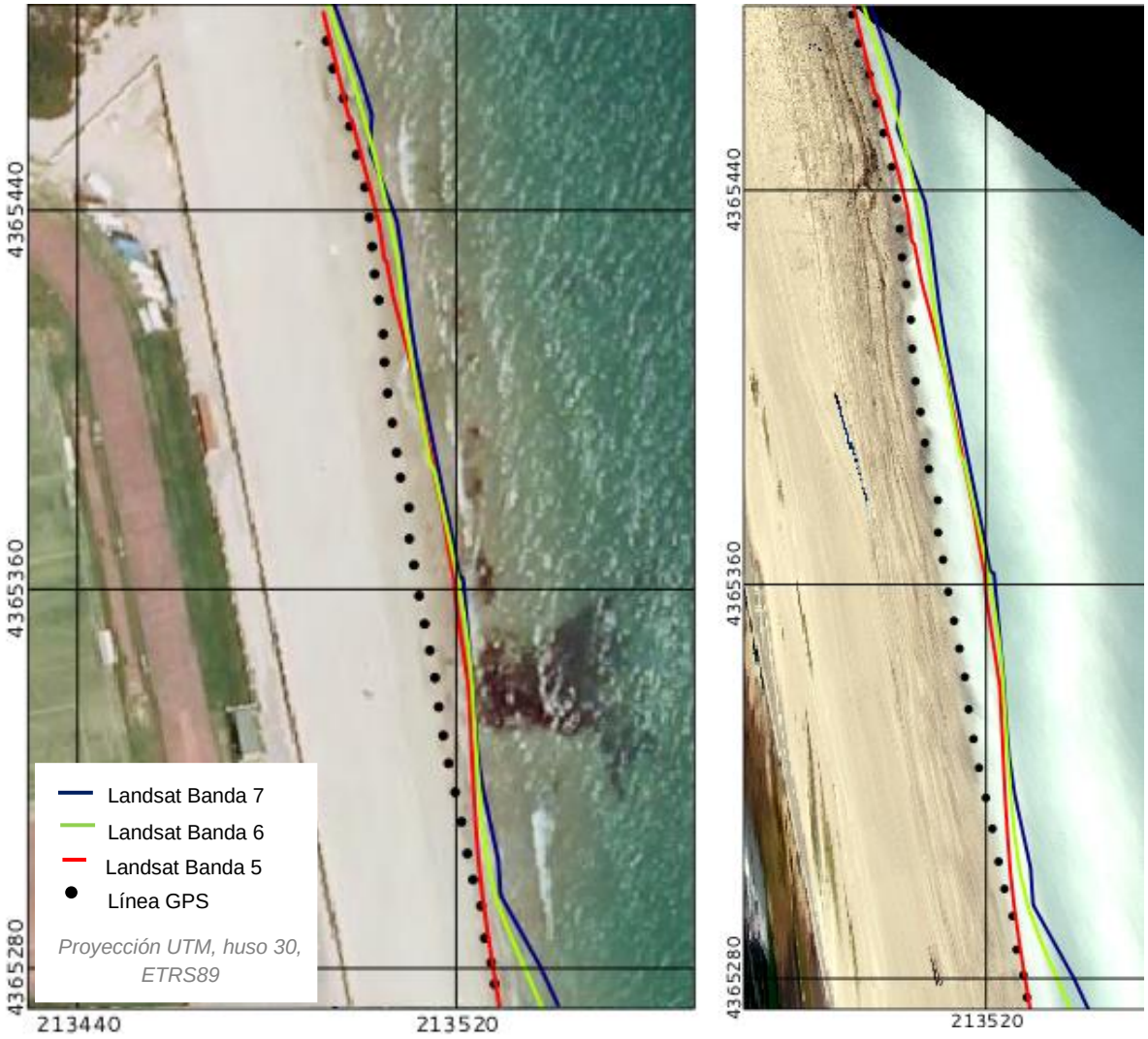


Figura 50: Gráfico de caja y bigotes que resume los resultados de las diferencias obtenidas entre una línea de costa determinada y la GPS. Por orden y de izquierda a derecha, encontramos las diferencias respecto a la línea proyectada de la imagen promedio y, las líneas Landsat, bandas 5, 6 y 7.

Se observa que la línea proyectada media se ajusta correctamente a la línea medida GPS mientras que las otras tres líneas obtenidas de Landsat se alejan considerablemente mar adentro en las magnitudes que resumen la siguiente tabla según las diferentes respuestas del infrarrojo:

Diferencia entre la línea GPS y las líneas de costa obtenidas de Landsat (m)					
Banda 5		***Banda 6***		***Banda 7***	
µ	σ	µ	σ	µ	σ
3.875	2.747	5.631	1.761	6.711	1.739

Visualmente la representación de las diferentes líneas sobre la ortofoto del PNOA (imagen izquierda) y sobre la imagen media proyectada (imagen derecha) es la siguiente:



Contrastando las líneas Landsat respecto a la línea proyectada obtenida de la fotografía promedio, podríamos intuir que el algoritmo Landsat está detectando como línea de costa la última rotura de olas, previa al movimiento de retroceso y generada por un primer desnivel en la pendiente de la playa. Esto se puede apreciar con mayor claridad en la imagen media ya que tales zonas de rotura del oleaje aparecen con unas tonalidades más claras que las representan.

No obstante y, en cualquier caso, fuera del alcance de este proyecto, líneas de investigación futuras seguirán analizando la mejora en la detección de la línea de costa. La herramienta creada servirá para registrar de forma rápida y eficaz la situación de la costa en cualquier momento. De este modo, la información obtenida podrá ser utilizada para fines de seguimiento costero y calibración de otros algoritmos desarrollados por el grupo de investigación.

CONCLUSIONES

La principal finalidad para la que se realizan muchos de los estudios en torno a la evolución de las zonas costeras es la de obtener una visión general de su estado para posteriormente predecir y determinar futuras actuaciones en el marco de una buena planificación del espacio litoral. El estudio del cambio costero es ineludible cuando comporta un conjunto de implicaciones negativas sobre los recursos y usos propios del espacio litoral, afectando a los valores naturales e intereses socioeconómicos. A este respecto, la metodología utilizada, juega un papel decisivo en la detección y análisis de la magnitud de los cambios con precisión y efectividad.

Existiendo dos objetivos principales que son en primer lugar, la creación de una herramienta que permitiese, de forma automática, la proyección sobre un plano georreferenciado de una fotografía terrestre del litoral y, en segundo lugar, la evaluación del potencial y precisión de la línea de costa obtenida comparándola con otras registradas por datos GPS o datos Landsat, podemos concluir que ambos han sido alcanzados.

Intentar modelizar la respuesta de un paisaje tan voluble geomorfológicamente como lo es el sector costero, requiere un considerable conjunto de datos y a este respecto, ha sido decisivo generar y comprobar la validez de las líneas de costa extraídas de una imagen proyectada con la herramienta "TiPro; *Terrestrial Image Projector*" desarrollada en este proyecto.

Por su fácil adquisición, rapidez, bajo coste, y cuantía en el volumen de datos, ya que cualquier persona y, con una cámara convencional, puede realizar la toma fotográfica, el programa generado se muestra como una herramienta muy eficaz para llevar a cabo tareas de análisis y gestión del litoral.

Como inconveniente, para estudios futuros y aplicación de la herramienta proyectiva en otros sectores costeros, hay que recordar la necesidad de disponer de las coordenadas planimétricas y altimétricas de un mínimo de tres puntos de apoyo perfectamente identificables en la fotografía y ubicados en planos distintos.

Para la zona de estudio del Saler con que se ha trabajado en este proyecto y, una vez se realizó el trabajo de medición en campo, el proceso quedó automatizado correctamente con el objeto de realizar un seguimiento del litoral simplemente a través de fotografías tomadas en el momento deseado como pueda ser tras un temporal, para analizar las consecuencias acaecidas y los efectos del mismo.

Tampoco hay que olvidar las limitaciones espaciales que supone el trabajar con una fotografía terrestre frente a por ejemplo una imagen del satélite Landsat.

En este contexto y, dentro del grupo CGAT, fue también pensada la idea de este proyecto. Generar una herramienta como la aquí expuesta "T*iPro*" que registrase de forma rápida y eficaz la situación de la costa en cualquier momento, ayudaría, en líneas de investigación futuras, a calibrar y mejorar el algoritmo desarrollado por Pardo *et al*., 2012.

La herramienta generada requiere por tanto, de un fichero con los puntos de control y, la fotografía que se quiere proyectar. El proceso será automático pero necesitará de la intervención del usuario en múltiples pasos como puedan ser la localización inicial de los puntos de control en la imagen, la decisión de si se quieren refinar los parámetros de orientación externa y según qué metodología de ajuste (dependiendo de la calidad de los parámetros aproximados de entrada), la selección del fragmento de imagen que se quiere proyectar y sobre qué plano, el tamaño del pixel que tendrá la imagen de salida, entre otros.

Para analizar la calidad del producto de salida, se diferenciaron dos indicadores de error que por perpendicularidad geográfica son independientes entre sí: uno longitudinal (error Norte-Sur) y otro transversal (Este-Oeste).

Por un lado, el error longitudinal se midió proyectando la imagen sobre la cota a la que se encontraban diferentes elementos fijos del terreno (visibles en la imagen y de los cuales se conociesen sus coordenadas), midiendo el desplazamiento entre su posición exacta conocida y la posición estimada sobre la imagen proyectada. De este modo se comprobó que este error proyectivo longitudinal se comportaba según un polinomio de segundo grado, de forma que crecía según nos alejábamos del punto desde donde se realizó la toma fotográfica. El error se estimó en 1 m para una distancia de 200 m.

Respecto al error transversal, se calculó mediante un análisis comparativo entre la línea de costa medida para toda la zona de estudio con técnicas GPS-RTK y, la línea de costa digitalizada sobre la imagen proyectada. El error promedio obtenido era inferior a 0.5 m para todo el tramo (de aproximadamente 250 m de longitud); magnitud de incertidumbre sobradamente válida en el contexto que nos encontramos donde la propia variabilidad que presenta el fenómeno analizado supera tales resultados. Por tanto, podremos afirmar que la línea de costa detectada se encuentra en la alineación correcta pese a que los puntos que la forman puedan estar más o menos lejos de su posición real (en función del error longitudinal).

Así mismo, uno de los aspectos más novedosos que han surgido en el desarrollo de este PFC ha sido la formulación de la ecuación de la línea de horizonte para que fuera dependiente de los parámetros de orientación externa e interna y poder incluirla así en el sistema de ajuste donde funcionará como constreñimiento al ponderarla con peso infinito. Igualmente de necesario y, vinculado a esta ecuación, fue el considerar la corrección de esfericidad terrestre.

En la realización del trabajo se ha podido comprobar que gracias a estas aportaciones en el ajuste, se ha conseguido aproximar correctamente la orientación de la cámara (giros ω, φ, κ) consiguiendo así unos resultados finales tan válidos para la detección de la línea de costa como los mostrados.

Por otro lado, el trabajo con una imagen promedio, resultado de un conjunto de fotografías instantáneas del litoral, ha permitido obviar el comportamiento aleatorio y oscilante del oleaje, facilitando así la detección e interpretación de la línea de costa.

La culminación de un proyecto como el presentado contiene todo su potencial y utilidad práctica en la monitorización de segmentos costeros que permitan la posterior predicción de situaciones futuras. Llegar a algo tan tangible como la cartografía de una situación venidera, será importante para gestionar futuras actuaciones y planificar un uso sostenible de los recursos costeros. Nuevas perspectivas de futuro y aplicabilidad deberán ser investigadas.

BIBLIOGRAFÍA

Almonacid, J., (*sin terminar, 2014*). Obtención de líneas de costa con precisión subpixel a partir de imágenes Landsat TM y ETM.

Balletti, C., Guerra, F., (1998). NM3digit: the DLT algorithm in a digital photogrammetrical software for the survey teaching in The International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Volume XXXII, Part 6W4, ISPRS WG VI/3 International Cooperation and Technology Transfert, Perugia il 16-20.

Bon A., 1996. Initial approximations for the three-dimensional conformal coordinate transformation. Photogrammetric engineering and remote sensing, Vol. 62. No., January 1996, pp. 79-83.

Bouguet, Jean-Yves., 1999. Complete camera calibration toolbox por Matlab; http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/. Computer vision research group, department of electrical engineering, California institute of Technology (Ph.D thesis).

Chen, F- J., (1997). Application of Least-Squares Adjustment Technique to Geometric Camera Calibration and Photogrammetric Flow Visualization, ISA 43rd International Instrumentation Symposium.

Dai, F., Lu, M., Kamat, V.R., (2011). Analytical approach to augmenting site photos with 3D graphics of underground infrastructure in construction engineering applications. Journal of computing in civil engineering.

Friel, M., Hughes, C., Denny, P., Jones, E., Glavin, M., (2009). Automatic calibration of fish-eye cameras from automotive video sequences. In IET Intell. Transp. Syst., Vol.4, iss. 2: 136-148

Guillén, J., Ojeda, E., (2008). Video monitorización de la zona costera: aplicaciones en playas urbanas. Jornadas técnicas "*Las nuevas técnicas de información geográfica al servicio de la gestión de zonas costeras: Análisis de la evolución de playas y dunas"*.

Holland, K. T., Holman, R. A., Lippmann, T. C., Stanley, J., Plant, N., (1997). Practical use of video imagery in nearshore oceanographic field studies. IEEE Journal of Oceanic Engineering 22(1), 81-92.

IPCC (2007): Intergovernmental Panel on Climate Change Fourth Assessment Report Climate Change 2007: Synthesis Report (en http://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/syr/ar4_syr_spm.pdf).

Lerma, J.L., (2010). Fotogrametría moderna: analítica y digital, Capítulo IV.

Madsen, K., Nielsen, H.B., Timgleff, O., (2004). Methods for Non-Linear Least Squares Problems.

Marín, J., Felipe, M. J., Balaguer, A., Capilla, M.T., (2012). Álgebra lineal. Editorial UPV.

Marín, J., Balaguer, A., Alemany, E., (2006). Un curso de álgebra con ejercicios II. Editorial UPV.

More, J., (1977). The levenberg-marquardt algorithm, implementation and theory. In G. A. Watson, editor, *Numerical Analysis*, Lecture Notes in Mathematics 630. Springer-Verlag.

Pardo Pascual, J.E., almonacid, J., Ruiz Fernández, L.A., y Palomar. J.M., (2012). Automatic extraction of shorelines from Landsat TM and ETM+ multi-temporal images with subpixel precision.

Pardo, J.E., Ruiz Fernández, L.A., Almonacid, J. y Calaf, X., (2008a). Detección automática de cambios en la línea de costa a partir de imágenes de satélite de resolución media, IX Congreso Top-Cart.

Pardo, J. E., Ruiz, L.A., Palomar, J.M., Calaf, X., Colmenárez G.R., Almonacid, J., Gracia, G., (2008b). Teledetección, GPS y Lidar: Nuevas técnicas de análisis y evolución de la línea de costa y de los espacios playa-duna. Actas de las Jornadas Técnicas, “Las nuevas técnicas de información geográfica al servicio de la gestión de zonas costeras: Análisis de la evolución de playas y dunas”.

Pardo, J.E., Palomar. J.M., García-Asenjo, L., Garrigues, P., Porres de la Haza, M.J., (2008c). Métodos y herramientas para la monitorización de cambios tridimensionales de las playas emergidas mediante GPS.RTK y SIG, IX Congreso Top-Cart.

Rodríguez, I., Sánchez, M.J., Montoya, I. (2009). Estudios de erosión con satélite en costas sedimentarias micromareales. En Métodos en Teledetección Aplicada a la Prevención de Riesgos Naturales en el Litoral. Alcántara, J., Correa, I., Isla, F., Alvarado, M. Editores. Manuales CYTED, 297 pp.

Rodríguez, J., Martín, M.T., Herráez, J., Arias, P., (2008). Three-dimensional image orientation through only one rotation applied to image processing in engineering. Applied optics/Vol. 47, No. 35, 6631-6637 pp.

Ruiz, L.A., Pardo Pascual, J.E., Almonacid, J., Rodríguez, B., (2007). Coastline automated detection and multiresolution evaluation using satellite images, Proceedings of Coastal Zone 07, Portland, Oregon.

Schneider, D., Schwalbe, E.,Maas, H.G., (2009). Validation of geometric models for fisheye lenses. In *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. 64, p.259-266.

Simarro, G., (2012). Georreferenciación de imágenes de las cámaras.

Zhang, Zhengyou., (1999). Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations. Microsoft Research, Microsoft Research, One Microsoft Way, Redmond, WA 98052-6399, USA.

DOCUMENTOS ANEJOS

Anejo 1:

En este anejo se resumen las diferentes rutinas programadas en lenguaje Matlab para que la herramienta generada consiga la proyección de un fotograma.

- Programa general (**TiPro**; *Terrestrial Image projector*): "*PROGRAMA.m*"
- Rutinas:
  1. "*CreaFicheroCoord_GCP.m*" (utiliza "*ginput_zoom.m*"): generas un fichero con las coordenadas imagen y terreno de los puntos de apoyo.
  2. "*TLD.m*": Resuelve de forma directa por mínimos cuadrados los once parámetros TLD (L_1, L_2,.., L_{11}) a partir de las coordenadas conocidas (imagen y terreno) de los puntos de control.
  3. "*Church.m*": Resuelve un proceso iterativo por mínimos cuadrados de las ecuaciones de Church para obtener las coordenadas aproximadas de la posición de la cámara (X0, Y0, Z0).
  4. "*ParamTLD_a_ParamOE.m*" y "*ParamTLD_a_ParamOE_Balleti.m*": Ambas funciones obtiene los parámetros de orientación externa (ω, φ, κ, X0, Y0, Z0) a partir de los once parámetros TLD pero por siguiendo dos métodos diferentes.

     4.1."Sin_cos_2_ang": Obtiene el ángulo que cumple la condición de un seno y un coseno.
  5. "*RefinamientoParamOE_OI_Colinealidad.m*": Resuelve un proceso iterativo por mínimos cuadrados de las ecuaciones de colinealidad (Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt con y sin escalado) para obtener los parámetros definitivos de orientación externa e interna, si se requiriese.
  6. "*ParamOE_ParamTLD.m*": Obtiene los once parámetros TLD a partir de los parámetros de orientación interna (x0, y0, focal) y externa (ω, φ, κ, X0, Y0, Z0).
  7. "*Funcion_xy_XY0.m*": realiza el proceso de proyección espacial para obtener las coordenadas terreno a partir de las coordenadas imagen de la fotografía (paso del espacio 2D al 3D).
  8. "*Funcion_XYZ_xy_TLD*" o" *Funcion_XYZ_xy_ProyColin*": realiza el proceso de resección espacial para generar la nueva imagen proyectada (generación de la radiometría de la imagen). Asocia a cada pixel con coordenadas terreno un valor radiométrico de la imagen original.
  9. "*Geotiffwrite.m*": genera la imagen georreferenciada.

Anejo 2:

En este anejo se comprueban los diferentes métodos programados para realizar la conversión de parámetros TLD a parámetros de orientación externa e interna. Se ha de tener en cuenta, de que se tratará de los parámetros iniciales aproximados de entrada en nuestro proceso metodológico.

Ejemplo 1:

Parámetros TLD *(de ejemplo pág. 13, Balletti, 1998)*		Parámetros OE, OI *Método: Lerma, 2010*		Parámetros OE, OI *Método: Balletti, 1998*	
L_1	219.01227	X0	-9.8908	X0	-9.8908
L_2	21.374012	Y0	3.5735	Y0	3.5735
L_3	-333.680169	Z0	5.5413	Z0	5.5413
L_4	3938.844077	ω	5.3017	ω	5.3017
L_5	-68.653285	φ	15.749	φ	15.749
L_6	-271.834339	κ	1.3969	κ	1.3969
L_7	-229.653299	x0	715.1494	x0	715.1494
L_8	1564.947798	y0	573.1279	y0	573.1279
L_9	-0.092618	f	778.0212	f	778.0212
L_{10}	0.030505	h	-0.9864	fx	772.9508
L_{11}	-0.365450	d	-0.0329	fy	767.8804

Ejemplo 2:

Parámetros TLD *(de ejemplo pág. 15, Balletti, 1998)*		Parámetros OE, OI *Método: Lerma, 2010*		Parámetros OE, OI *Método: Balletti, 1998*	
L_1	128.218657	X0	-12.5487	X0	-12.5487
L_2	-1.140694	Y0	2.9267	Y0	2.9267
L_3	-91.319994	Z0	6.6576	Z0	6.6576
L_4	2220.282485	ω	0.397698	ω	0.397698
L_5	4.718858	φ	-7.337590	φ	-7.337590
L_6	-63.306159	κ	0.932062	κ	0.932062
L_7	-47.926623;	x0	847.6427	x0	847.6427
L_8	563.570380	y0	383.8882	y0	383.8882
L_9	0.014307	f	939.5082	f	939.5082
L_{10}	0.00772	h	-0.5442	fx	725.4077
L_{11}	-0.123577	d	0.0013	fy	511.3072

Ejemplo 3:

Parámetros TLD *(de ejemplo pág. 149, Lerma, 2010)*		Parámetros OE, OI *Método: Lerma, 2010*		Parámetros OE, OI *Método: Balletti, 1998*	
L_1	3.26364313473	X0	12.2981	X0	12.2981
L_2	0.04913703791	Y0	12.61	Y0	12.6099
L_3	-0.10138257357	Z0	19.1116	Z0	19.1116
L_4	-38.81868120388	ω	4.957076	ω	4.957076
L_5	-0.04049417843	φ	2.012741	φ	2.012741
L_6	3.25159510973	κ	0.801295	κ	0.801295
L_7	0.24964924607	x0	0.0310	x0	0.0309
L_8	-45.27579601679	y0	0.0981	y0	0.0981
L_9	-0.00171308460	f	60.2584	f	60.2584
L_{10}	0.00421340090	h	0.9987	fx	60.2199
L_{11}	-0.05400181247	d	0.002153	fy	60.1814

Y proceso inverso con los parámetros OE y OI obtenidos:

Parámetros OE, OI		Parámetros TLD *Método: Lerma, 2010*	
X0	12.2981	L_1	3,26091642125787
Y0	12.6099	L_2	0,0411768758779489
Z0	19.1116	L_3	-0,104813101158847
ω	4.957076	L_4	-38,6192071764187
φ	2.012741	L_5	-0,0330933340266701
κ	0.801295	L_6	3,25322780961611
x0	0.0309	L_7	0,248387368568722
y0	0.0981	L_8	-45,3632842190956
f	60.2584	L_9	-0,00175934632970741
		L_{10}	0,00419017562254579
		L_{11}	-0,0539567194007889

Anejo 3:

El programa generado "T*iPro*" genera en un fichero de texto el informe de resultados del ajuste mínimo cuadrático que se resuelve en el proceso de refinamiento de los parámetros de orientación externa. Muestra el resultado de todas las matrices y parámetros a lo largo de todo el proceso iterativo y, por cada método de resolución (Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt con escalado y, sin escalado).

A continuación se muestran los resultados de las dos primeras iteraciones y la última, del ajuste por colinealidad con los seis parámetros de orientación externa libres (ω, φ, κ, X0, Y0, Z0), para el ejemplo de la playa Sur y resuelto por el método de Gauss-Newton:

RESULTADOS ITERACIÓN NÚMERO 1

Parámetros entrada aproximados:

ω	φ	κ	X0	Y0	Z0	x0	y0	focal
0.838364	0.070484	3.349809	-10.5728	58.8441	7.5827	0.5	-0.5	-3385.725

Matriz x con los diferenciales de los 6 parámetros de OE y sus desviaciones:

	Corrección	Desv.Corr.	Corr/Desv	p-value
dω	-0.535282	0.158082	-3.386105	0.005407
dφ	0.070109	0.117795	0.595172	0.562784
dκ	-0.246448	11.397866	-0.021622	0.983105
dX0	-3.575173	655.994779	-0.005450	0.995741
dY0	7.337331	1715.583993	0.004277	0.996658
dZ0	5.862214	304.543147	0.019249	0.984959

Residuos:

1353.355123
-1695.235923
1064.147623
-2269.404715
1068.457031
-2344.697415
1043.431053
-2372.480996
1095.149571
-2386.391565
1100.465514
-2377.041701
1227.561836
-2207.796202
1135.752203
-2355.590016
-0.528491
0.139208

Desviación del **estimador** de peso unidad a posteriori:

Con ponderación	Sin ponderación (píxeles)
15785.506	2068.014

RESULTADOS ITERACIÓN NÚMERO 2

Parámetros entrada aproximados:

ω	φ	κ	X0	Y0	Z0	x0	y0	focal
1.373646	0.000375	3.596257	-6.9976	51.5068	1.7205	0.5	-0.5	-3385.725

Matriz x con los diferenciales de los 6 parámetros de OE y sus desviaciones:

	Corrección	Desv.Corr.	Corr/Desv	p-value
dω	0.004554	0.013074	0.348285	0.733660
dφ	0.044055	0.012822	3.435848	0.004932
dκ	-0.080198	1.000132	-0.080188	0.937410
dX0	2.966064	45.470057	0.065231	0.949064
dY0	-6.626046	88.181304	-0.075141	0.941341
dZ0	-4.728720	22.315276	-0.211905	0.835738

Residuos:

749.047273
-672.984791
-152.487051
-621.692024
-157.857672
-689.410312
-175.659225
-682.243689
60.205523
-500.899210
81.167146
-474.997971
256.257311
-183.534341
200.162809
-299.135145
0.004560
0.044924

Desviación del **estimador** de peso unidad a posteriori:

Con ponderación	Sin ponderación (píxeles)
1307.546	511.199

...

RESULTADOS ITERACIÓN NÚMERO 9 → Final del ajuste

Parámetros entrada aproximados:

ω	φ	κ	X0	Y0	Z0	x0	y0	focal
1.368890	-0.043637	3.673767	-10.319727	61.389319	7.990885	0.5	-0.5	-3385.725

Matriz x con los diferenciales de los 6 parámetros de OE y sus desviaciones:

	Corrección	Desv.Corr.	Corr/Desv	p-value
dω	-0.000000	0.000017	-0.000000	1.000000
dφ	0.000000	0.000017	0.000000	1.000000
dκ	-0.000000	0.001577	-0.000000	1.000000
dX0	0.000000	0.087158	0.000000	1.000000
dY0	0.000000	0.260347	0.000000	1.000000
dZ0	0.000000	0.050324	0.000000	1.000000

Residuos:

4.555876
-3.818540
2.723394
-1.283811
-1.737443
-6.780305
-24.914763
-3.031782
-0.318580
-6.998458
-0.349460
-4.090140
-0.449837
8.780304
7.699109
0.039783
-0.000000
0.000000

Desviación del **estimador** de peso unidad a posteriori:

Con ponderación	Sin ponderación (píxeles)
1.739	8.784

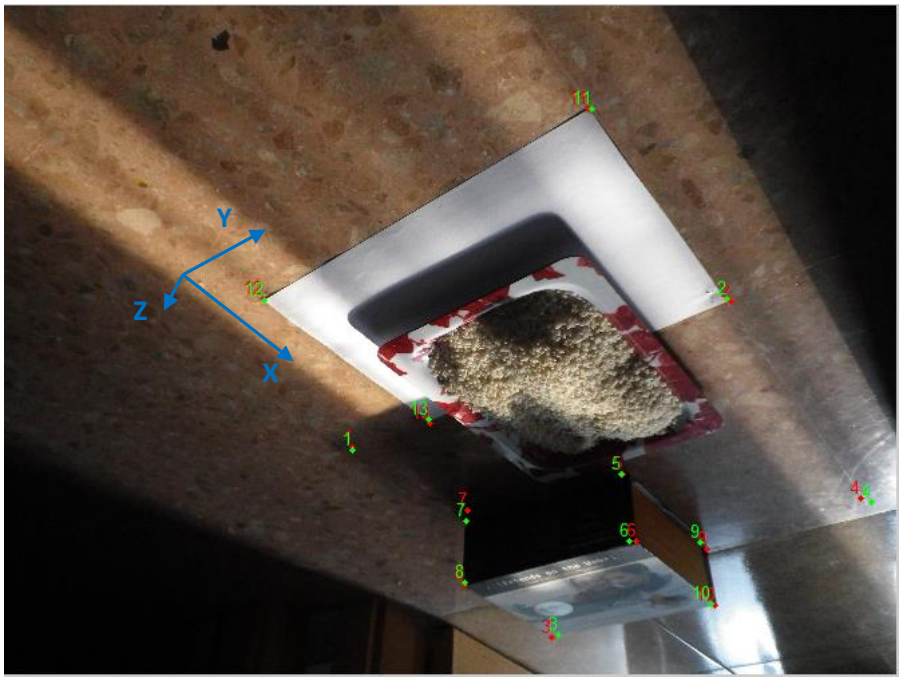
Anejo 4:

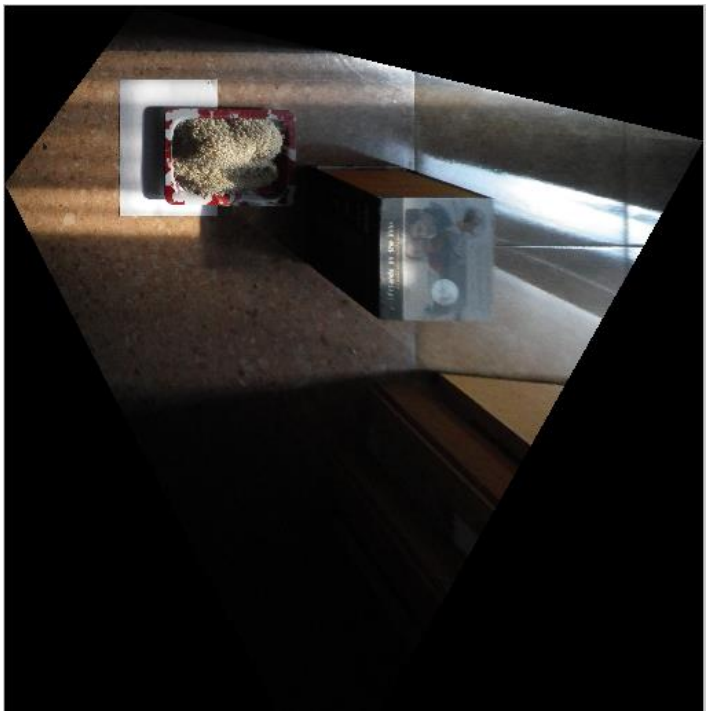
A continuación se muestran los resultados del proceso proyectivo sobre un plano de cota cero de diferentes escenarios generados como pruebas de la metodología seguida, así como el mismo escenario pero con diferente orientación para ver si el programa era capaz de simular y orientar la toma fotográfica. En los ejemplos mostrados el procedimiento seguido ha sido:

- Calibración de la cámara y uso de los parámetros de orientación interna obtenidos de ésta.
- Detección de los once parámetros TLD (Li) mediante la relación entre el espacio terreno e imagen a través de los puntos de control. Para estos casos sintéticos en el ajuste la ponderación se ha considerado igual a la unidad para todos los observables.
- A partir de éstos, obtención de los seis parámetros de orientación externa refinados mediante un ajuste iterativo según las ecuaciones de colinealidad. Nuevamente transformación de estos parámetros a los once de la TLD.
- Proyección sobre plano de cota cero por ecuaciones TLD y, remuestreo siguiendo el método del vecino más próximo.

Siguiendo este procedimiento los resultados para cada escenario son:

Arroz_Sur:

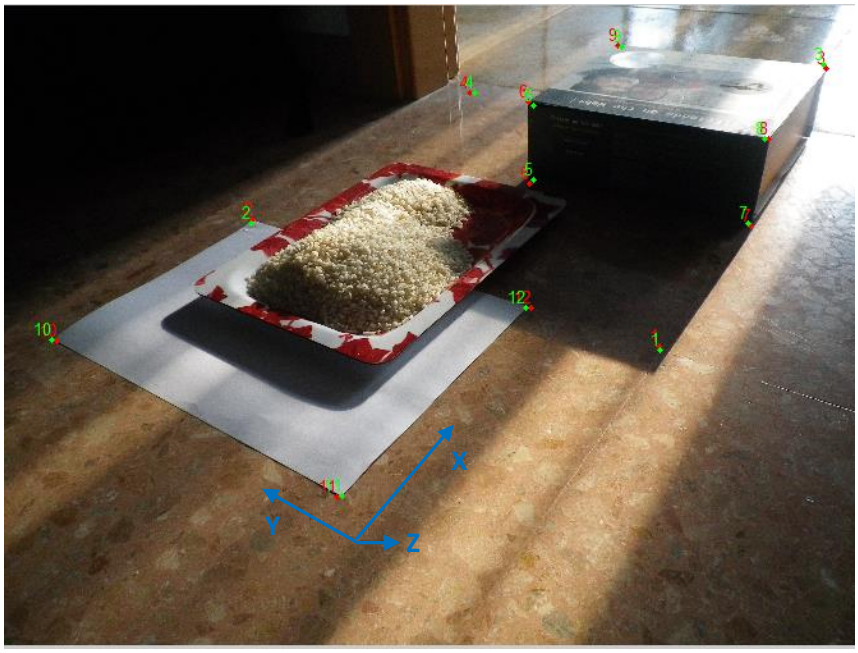


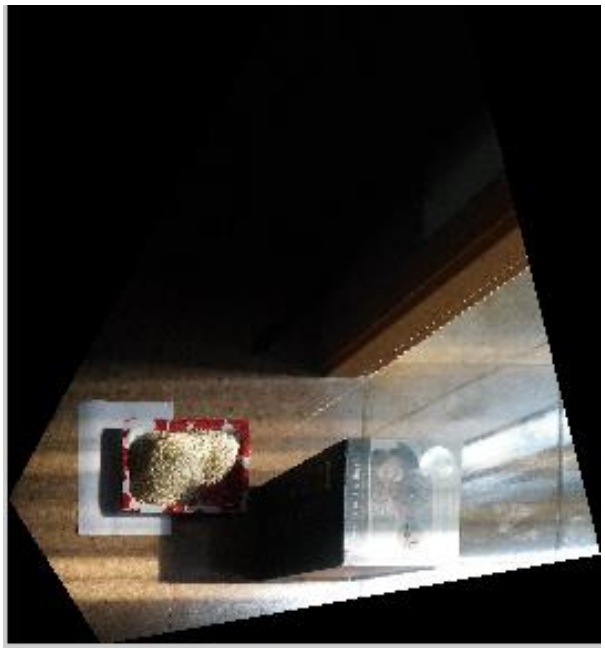


Se realizaron algunas mediciones que se muestran a continuación para comprobar el resultado de la proyección. Es necesario saber el tamaño del pixel al que se generó la imagen de salida y que en este caso es de 0.1cm/pixel.

	Distancia medida	Distancia realidad
Ancho hoja norte	214 píxeles≡21.4cm	21 cm
Ancho hoja sur	213 píxeles ≡21.3cm	21 cm
Largo hoja oeste	297 píxeles ≡29.7cm	29.7 cm
Largo hoja este	298 píxeles ≡29.8cm	29.7 cm

Arroz Este:

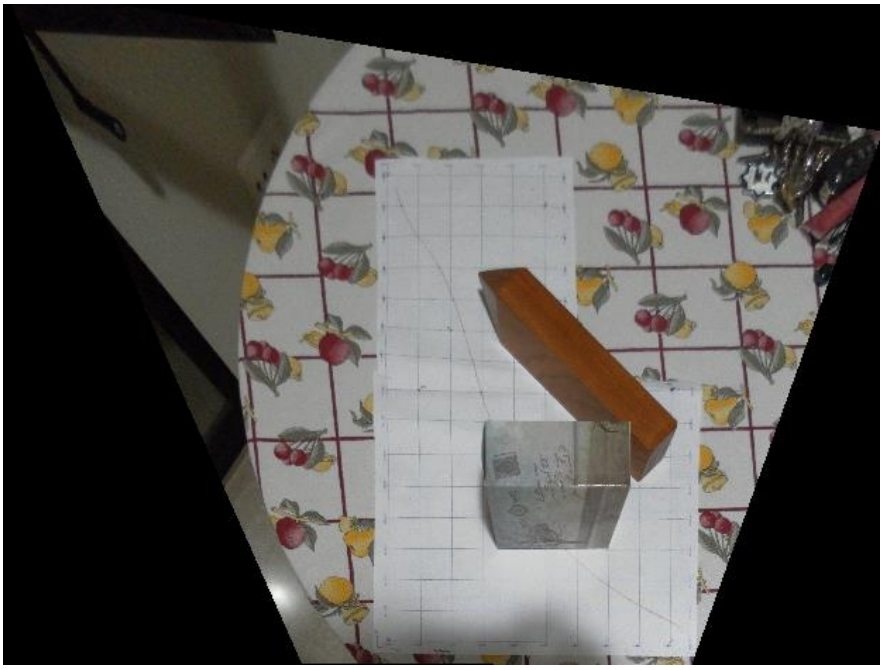




Se realizaron algunas mediciones que se muestran a continuación para comprobar el resultado de la proyección. Es necesario saber el tamaño del pixel al que se generó la imagen de salida y que en este caso es de 0.1cm/pixel.

	Distancia medida	Distancia realidad
Ancho hoja norte	214 píxeles≡ 21.4cm	21 cm
Ancho hoja sur	213 píxeles ≡21.3cm	21 cm
Largo hoja oeste	299 píxeles ≡29.9cm	29.7 cm
Largo hoja este	299 píxeles ≡29.9cm	29.7 cm

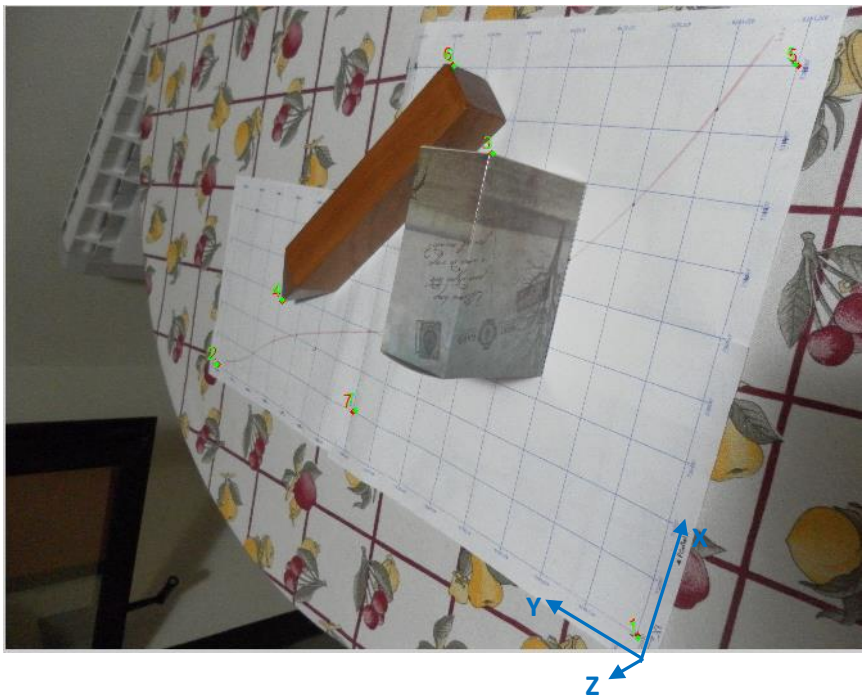
Escritorio2_Norte:



Se realizaron algunas mediciones que se muestran a continuación para comprobar el resultado de la proyección. Es necesario saber el tamaño del pixel al que se generó la imagen de salida y que en este caso es de 0.1cm/pixel.

	Distancia medida	Distancia realidad
Ancho hoja cuadriculada (distancia entre los puntos de control 1 y 5)	299.015 píxeles ≡ 29.9015cm	30 cm
Alto hoja cuadriculada (distancia entre los puntos de control 1 y 2)	496 píxeles ≡ 49.6 cm	49.8 cm
Cuadro mantel	83 x82.5 píxeles ≡ 8.25x8.3 cm	8.4 x 8.5 cm
Cuadrado de la parte norte de la cuadrícula	33 x31 píxeles ≡ 3.3x3.1 cm	3.3x3.3 cm
Cuadrado de la parte sur de la cuadrícula	33 x33 píxeles ≡3.3x 3.3 cm	3.3x3.3 cm

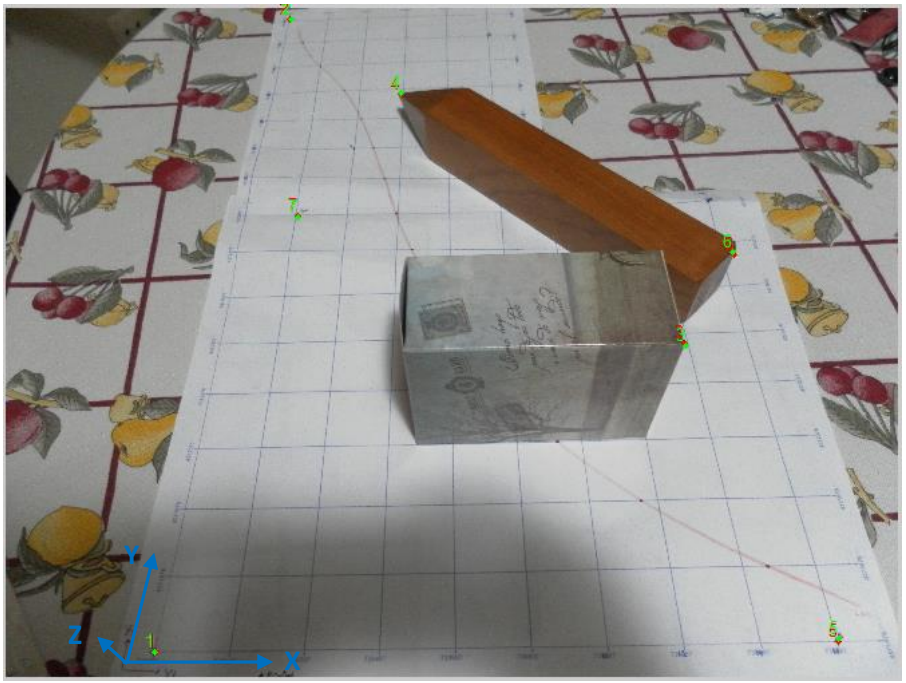
Escritorio2_Oeste:



Se realizaron algunas mediciones que se muestran a continuación para comprobar el resultado de la proyección. Es necesario saber el tamaño del pixel al que se generó la imagen de salida y que en este caso es de 0.1cm/pixel.

	Distancia medida	Distancia realidad
Ancho hoja cuadriculada (distancia entre los puntos de control 1 y 5)	299.0067 píxeles ≡ 29.90067cm	30 cm
Alto hoja cuadriculada (distancia entre los puntos de control 1 y 2)	496 píxeles ≡ 49.6cm	49.8 cm
Cuadro mantel	81.62x 83 píxeles ≡ 8.2x8.3cm	8.4 x 8.5 cm
Cuadrado de la parte norte de la cuadrícula	33.015x31 píxeles ≡3.3015x3.1 cm	3.3x3.3 cm
Cuadrado de la parte sur de la cuadrícula	33x33 píxeles ≡ 3.3x3.3 cm	3.3x3.3 cm

Escritorio2_Frente:



Se realizaron algunas mediciones que se muestran a continuación para comprobar el resultado de la proyección. Es necesario saber el tamaño del pixel al que se generó la imagen de salida y que en este caso es de 0.05cm/pixel.

	Distancia medida	Distancia realidad
Ancho hoja cuadriculada (distancia entre los puntos de control 1 y 5)	599.0033 pixeles ≡ 29.95cm	30 cm
Cuadro mantel	168.0744x 166.8682≡ 8.34 x8.4cm	8.4 x 8.5 cm
Cuadrado de la parte norte de la cuadrícula	64x66 píxeles ≡ 3.2x3.3 cm	3.3x3.3 cm
Cuadrado de la parte sur de la cuadrícula	67x67 pixeles ≡ 3.35x3.35 cm	3.3x3.3 cm